ГЕОМЕТРІЯ Г. В. АПОСТОЛОВА 11 КЛАС

Tools

МІЧНИЙ, ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ).

Розв'язання вправ та завдань до підручника «ГЕОМЕТРІЯ» Г. В. Апостолової

Академічний рівень, профільний рівень

alldz.net



§ 1. Прямокутна система координат у просторі

ПОЯСНЕННЯ

Нехай задані точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.
Відстань між точками A і B знаходять за формулою:
$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
Координати точки $M(x; y; z)$, яка є серединою відрізка AB, знаходять за формулами:
$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.
Координати точки $D(x; y; z)$, що поділяє відрізок AB у відношенні $AD : DB = n : m$, знаходять за формулами:
$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n}$; $y = \frac{my_1 + ny_2}{m + n}$; $z = \frac{mz_1 + nz_2}{m + n}$.
Координати точки $D(x; y; z)$, що поділяє відрізок AB у відношенні $AD : DB = \lambda$, знаходять за формулами:
$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$; $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Завдання 1

1. 1) $A(0; 1; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(3; 0; 0)$;
2) $M(2; 2; 0)$;
3) $A(3; 0; 2)$, $B(0; 3; 3)$;
4) $M(0; 3; 4)$.

2. 1) $P(0; 0; -1)$, $P \in Oz$; $H(2; 0; 0)$, $H \in Ox$;
2) $B(0; -4; 0)$, $B \in Oy$; $C(0; 2; 0)$, $C \in Oy$.

3. 1) $K(0; 1; 1)$, $K \in zOy$; $P(2; 0; 1)$, $P \in xOz$;
2) $C(4; 3; 0)$, $C \in xOy$.

4. $OABC$ — квадрат; $d = \sqrt{2}$, тому $a = 1$ $\left(d = a\sqrt{2}\right)$.
а) $O(0; 0; 0)$, $A(0; 0; 1)$, $B(0; 1; 1)$, $C(0; 1; 0)$;
б) $O(0; 0; 0)$, $A(0; 0; -1)$, $B(0; 1; -1)$, $C(0; 1; 0)$;
в) $O(0; 0; 0)$, $A(0; 0; 1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; 0; 0)$;
г) $O(0; 0; 0)$, $A(0; 0; -1)$, $B(1; 0; -1)$, $C(1; 0; 0)$.

5. 1) $M_{xOy}(0; 3; 0)$, $M_{xOz}(0; 0; 4)$, $M_{yOz}(0; 3; 4)$;
2) $M_{xOy}(2; 3; 0)$, $M_{xOz}(2; 0; 4)$, $M_{yOz}(0; 3; 4)$;
3) $M_{xOy}(-1; 1; 0)$, $M_{xOz}(-1; 0; 3)$, $M_{yOz}(0; 1; 3)$,
де M_{xOy}, M_{xOz}, M_{yOz} — ортогональні проекції точки M на відповідні координатні площини.

6. Якщо $M(x; y; z)$ — точка простору, $O(0; 0; 0)$ — початок координат, то
$|MO| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $|MM_{xOy}| = |z|$; $|MM_{xOz}| = |y|$; $|MM_{yOz}| = |x|$.
1) $|AO| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$; $|AA_{xOy}| = 0$; $|AA_{xOz}| = 1$; $|AA_{yOz}| = 1$;
$|BO| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = 3$; $|BB_{xOy}| = 0$; $|BB_{xOz}| = 0$; $|BB_{yOz}| = 3$;
2) $|CO| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$; $|CC_{xOy}| = 0$; $|CC_{xOz}| = 1$; $|CC_{yOz}| = 0$;
$|TO| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{38}$; $|TT_{xOy}| = 3$; $|TT_{xOz}| = 2$; $|TT_{yOz}| = 5$.

7. 1) $|MN| = \sqrt{(2 - 2)^2 + (0 - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$.

alg7.net

7. 1) $|MN| = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$;

2) $|KT| = \sqrt{(-4-0)^2 + (1-1)^2 + (3-0)^2} = 5$.

8. 1) M — середина AB, $M\left(\frac{7+3}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$; $M(5; 1; 0)$;

2) N — середина CT, $N\left(\frac{0-4}{2}; \frac{-1-1}{2}; \frac{0+2}{2}\right)$; $N(-2; -1; 1)$.

9. 1) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4$; 2) $\sqrt{y^2+z^2}=2$; 3) $x=\pm 3$; 4) $\begin{cases}\sqrt{x^2+z^2}=1,\\ y=\pm 1.\end{cases}$

10. Якщо точка віддалена від початку координат на 3, то її координати відповідають умові: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3$. Враховуючи другу умову, маємо:

1) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3,\\ \sqrt{y^2+z^2}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y^2+z^2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=8,\\ y^2+z^2=1;\end{cases}$ $M\left(2\sqrt{2}; 1; 0\right)$;

2) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3,\\ z=\pm 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2+1=9,\\ z=\pm 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2=8,\\ z=\pm 1;\end{cases}$ $M\left(2\sqrt{2}; 0; 1\right)$;

3) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3,\\ \sqrt{y^2+z^2}=1,\\ x=\pm 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y^2+z^2=1,\\ x=\pm 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=8,\\ y^2+z^2=1,\\ x=\pm 1;\end{cases}$ таких точок не існує;

4) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3,\\ \sqrt{y^2+z^2}=1,\\ \sqrt{z^2+x^2}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y^2+z^2=1,\\ z^2+x^2=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=8,\\ y^2+z^2=1,\\ 8+z^2\neq 4;\end{cases}$ таких точок не існує;

5) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3,\\ z=\pm 1,\\ x=\pm 14;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2+1=9,\\ z=\pm 1,\\ x=\pm 14;\end{cases}$ $196+y^2+1\neq 9$; таких точок не існує;

6) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3,\\ \sqrt{y^2+z^2}=1,\\ \sqrt{z^2+x^2}=1,\\ \sqrt{x^2+y^2}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y^2+z^2=1,\\ z^2+x^2=2,\\ x^2+y^2=4,\end{cases}$ $\begin{cases}z^2=5,\\ x^2=8,\\ y^2=8;\end{cases}$ $5+8+8\neq 9$; таких точок не існує;

7) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3,\\ x=\pm 1,\\ z=\pm 1,\\ y=\pm 1;\end{cases}$ $\sqrt{1+1+1}\neq 3$; таких точок не існує.

11. Оскільки найкоротша відстань від точки до площини — це довжина перпендикуляра, то найкоротшою відстанню від точки до координатної площини є відстань від даної точки до її ортогональної проекції на дану площину.

$M_{xOy}(-1; 2; 0)$, $M_{xOz}(-1; 0; -3)$, $M_{yOz}(0; 2; -3)$.

12. Найкоротша відстань від точки до прямої — довжина перпендикуляра, найкоротшою відстанню від даної точки до координатної прямої є відстань від даної точки до проекції цієї точки на координатну пряму.

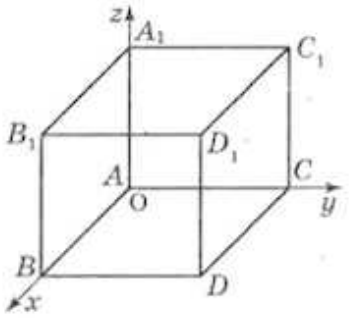
$P_{Ox}(3; 0; 0)$, $P_{Oy}(0; -4; 0)$, $P_{Oz}\left(0; 0; \sqrt{7}\right)$.

aldz.net

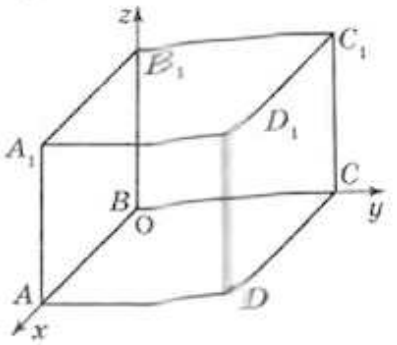


13. Для куба з ребром a: $d = a\sqrt{3}$.

1) $a = 3$; $d = 3\sqrt{3}$;
$D(3; 3; 0)$;
$B_1(3; 0; 3)$; $C_1(0; 3; 3)$; $D(3; 3; 3)$;



2) $a = 2$; $d = 2\sqrt{3}$; $D(2; 2; 0)$;
$A_1(2; 0; 2)$; $C_1(0; 2; 2)$; $D_1(2; 2; 2)$.

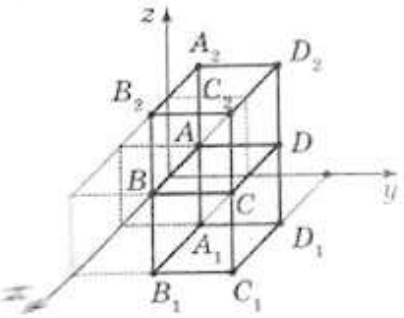


14. $OA_1 = d = a\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$; $a = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$O(0; 0; 0)$; $C\left(0; 0; 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $B\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 0; 0\right)$; $A\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 0\right)$; $O_1\left(0; 0; -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$;

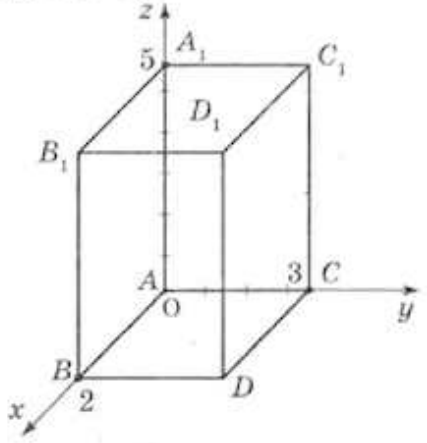
$C_1\left(0; 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $B_1\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 0; -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $A_1\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

15. Кубів існує два: $ABCD$ може бути верхньою або нижньою основою.
Якщо $ABCD$ — верхня основа, що $A_1(1; 1; 0)$, $B_1(2; 1; 0)$, $C_1(2; 2; 0)$, $D_1(1; 2; 0)$.
Якщо $ABCD$ — нижня основа, то $A_2(1; 1; 2)$, $B_2(2; 1; 2)$, $C_2(2; 2; 2)$, $D_2(1; 2; 2)$.

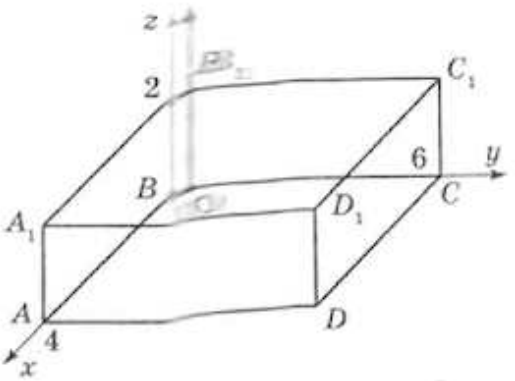


16. Якщо a, b, c — ребра прямокутного паралелепіпеда, то $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$;
$d = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38}$;
$D(2; 3; 0)$, $B_1(2; 0; 5)$, $C_1(0; 3; 5)$,
$D_1(2; 3; 5)$;



2) $a = 4$, $b = 6$, $c = 2$;
$d = \sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{56} = \sqrt{4 \cdot 14} =$
$= 2\sqrt{14}$;
$D(4; 6; 0)$, $A_1(4; 0; 2)$, $C_1(0; 6; 2)$,
$D_1(4; 6; 2)$.



alaz.net

17. 1) $C\left(\frac{0+4}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{-1+1}{2}\right)$; $C(2; 1; 0)$;

2) $C\left(\frac{14+x}{2}; \frac{-8+y}{2}; \frac{5+z}{2}\right)$; $\frac{14+x}{2} = 3$; $\frac{-8+y}{2} = -2$; $\frac{5+z}{2} = -7$;

$x = -8$, $y = 4$, $z = -19$. Отже, $B(-8; 4; -19)$;

3) $C\left(\frac{0+x}{2}; \frac{0+y}{2}; \frac{2+z}{2}\right)$; $\frac{x}{2} = -12$; $\frac{y}{2} = 4$; $\frac{2+z}{2} = 15$;

$x = -24$, $y = 8$, $z = 28$. Отже, $A(-24; 8; 28)$.

18. C — середина AB; $C \in Ox$, отже, $C(x; 0; 0)$.

1) $C\left(\frac{-3+2}{2}; \frac{m-2}{2}; \frac{5+n}{2}\right)$; $\frac{m-2}{2} = 0$; $\frac{5+n}{2} = 0$; $m = 2$, $n = -5$;

2) $C\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0{,}5+m}{2}; \frac{-4+2n}{2}\right)$; $\frac{0{,}5+m}{2} = 0$; $\frac{-4+2n}{2} = 0$; $m = -0{,}5$, $2n = 4$, $n = 2$;

3) $C\left(\frac{0+1}{2}; \frac{m+n}{2}; \frac{n+1+1-m}{2}\right)$; $\frac{m+n}{2} = 0$; $m = -n$;

$\begin{cases} m+n=0, \\ n-m=-2, \end{cases}$ $+;-$ $\begin{cases} 2n=-2, \\ 2m=2; \end{cases}$ $\begin{cases} n=-1, \\ m=1; \end{cases}$

4) $C\left(\frac{7-5}{2}; \frac{2m+n-3}{2}; \frac{-n+m-3}{2}\right)$; $\begin{cases} 2m+n=3, \\ m-n=3; \end{cases}$ $\begin{cases} 3m=6, \\ 3n=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} m=2, \\ n=-1. \end{cases}$

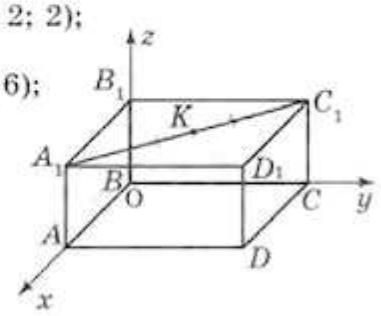
19. 1) $C_1(0; 4; 2)$; $A_1(2; 0; 2)$; $K\left(\frac{0+2}{2}; \frac{4+0}{2}; \frac{2+2}{2}\right)$; $K(1; 2; 2)$;

2) оскільки K — середина A_1C_1, то $K(x; 2; 6)$; $C_1(0; y; 6)$;

$K\left(\frac{0+3}{2}; \frac{0+y}{2}; \frac{6+6}{2}\right)$; $K(1{,}5; 2; 6)$;

$\frac{0+y}{2} = 2$; $y = 4$, отже, $C_1(0; 4; 6)$,

тоді $C(0; 4; 0)$; $D(3; 4; 0)$; $D_1(3; 4; 6)$.



20. Знайдемо координати проекцій точок A і B на координатні площини та довжини проекцій.

xOy: $A(2; 0; 0)$; $B(1; -1; 0)$; $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$;

xOz: $A(0; 0; 3)$; $B(1; 0; -3)$; $|AB| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (3+3)^2} = \sqrt{37}$;

yOz: $A(0; 0; 3)$; $B(0; -1; -3)$; $|AB| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{37}$.

	1) 2 : 3;	2) 1 : 2;	3) 2 : 1;
xOz:	$\lvert BC\rvert = 0{,}6\sqrt{2}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{2}{3}\sqrt{2}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{1}{3}\sqrt{2}$;
xOz:	$\lvert BC\rvert = 0{,}6\sqrt{37}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{2}{3}\sqrt{37}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{1}{3}\sqrt{37}$;
yOz:	$\lvert BC\rvert = 0{,}6\sqrt{37}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{2}{3}\sqrt{37}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{1}{3}\sqrt{37}$.

21. $|MB| = |MC|$

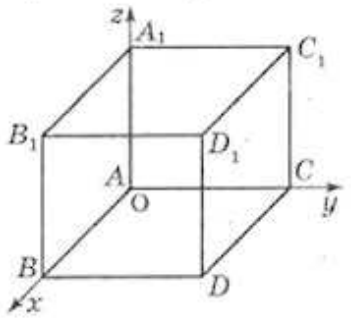
$(1-0)^2 + (2-a)^2 + 0^2 = 0^2 + (1-a)^2 + (0-1)^2$;

$1 + 4 - 4a + a^2 = 1 - 2a + a^2 + 1$; $3 = 2a$; $a = 1{,}5$.

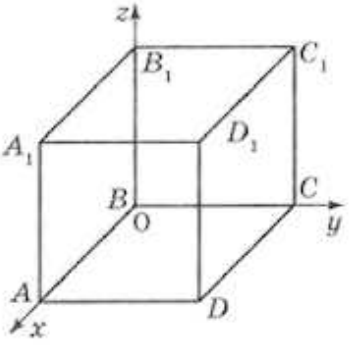
aloz.net

13. Для куба з ребром a: $d = a\sqrt{3}$.

1) $a = 3$; $d = 3\sqrt{3}$;
$D(3; 3; 0)$;
$B_1(3; 0; 3)$; $C_1(0; 3; 3)$; $D(3; 3; 3)$;



2) $a = 2$; $d = 2\sqrt{3}$; $D(2; 2; 0)$;
$A_1(2; 0; 2)$; $C_1(0; 2; 2)$; $D_1(2; 2; 2)$.

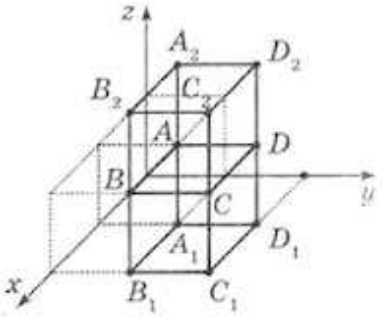


14. $OA_1 = d = a\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$; $a = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$O(0; 0; 0)$; $C\left(0; 0; 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $B\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 0; 0\right)$; $A\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 0\right)$; $O_1\left(0; 0; -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$;

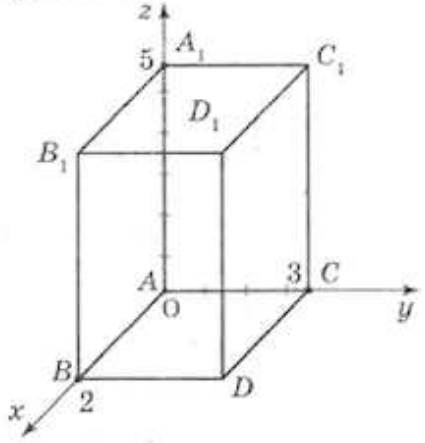
$C_1\left(0; 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $B_1\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 0; -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $A_1\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}; -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

15. Кубів існує два: $ABCD$ може бути верхньою або нижньою основою.
Якщо $ABCD$ — верхня основа, що $A_1(1; 1; 0)$, $B_1(2; 1; 0)$, $C_1(2; 2; 0)$, $D_1(1; 2; 0)$.
Якщо $ABCD$ — нижня основа, то $A_2(1; 1; 2)$, $B_2(2; 1; 2)$, $C_2(2; 2; 2)$, $D_2(1; 2; 2)$.

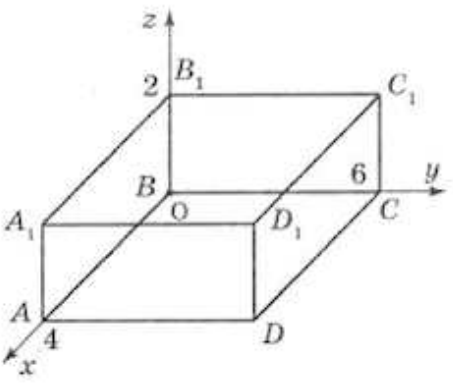


16. Якщо a, b, c — ребра прямокутного паралелепіпеда, то $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$;
$d = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38}$;
$D(2; 3; 0)$, $B_1(2; 0; 5)$, $C_1(0; 3; 5)$,
$D_1(2; 3; 5)$;



2) $a = 4$, $b = 6$, $c = 2$;
$d = \sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{56} = \sqrt{4 \cdot 14} =$
$= 2\sqrt{14}$;
$D(4; 6; 0)$, $A_1(4; 0; 2)$, $C_1(0; 6; 2)$,
$D_1(4; 6; 2)$.



alldz.net

17. 1) $C\left(\frac{0+4}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{-1+1}{2}\right)$; $C(2; 1; 0)$;

2) $C\left(\frac{14+x}{2}; \frac{-8+y}{2}; \frac{5+z}{2}\right)$; $\frac{14+x}{2} = 3$; $\frac{-8+y}{2} = -2$; $\frac{5+z}{2} = -7$;

$x = -8$, $y = 4$, $z = -19$. Отже, $B(-8; 4; -19)$;

3) $C\left(\frac{0+x}{2}; \frac{0+y}{2}; \frac{2+z}{2}\right)$; $\frac{x}{2} = -12$; $\frac{y}{2} = 4$; $\frac{2+z}{2} = 15$;

$x = -24$, $y = 8$, $z = 28$. Отже, $A(-24; 8; 28)$.

18. C — середина AB; $C \in Ox$, отже, $C(x; 0; 0)$.

1) $C\left(\frac{-3+2}{2}; \frac{m-2}{2}; \frac{5+n}{2}\right)$; $\frac{m-2}{2} = 0$; $\frac{5+n}{2} = 0$; $m = 2$, $n = -5$;

2) $C\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0{,}5+m}{2}; \frac{-4+2n}{2}\right)$; $\frac{0{,}5+m}{2} = 0$; $\frac{-4+2n}{2} = 0$; $m = -0{,}5$, $2n = 4$, $n = 2$;

3) $C\left(\frac{0+1}{2}; \frac{m+n}{2}; \frac{n+1+1-m}{2}\right)$; $\frac{m+n}{2} = 0$; $m = -n$;

$\begin{cases} m+n=0, \\ n-m=-2, \end{cases} \left| \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right. \begin{cases} 2n=-2, \\ 2m=2; \end{cases} \begin{cases} n=-1, \\ m=1; \end{cases}$

4) $C\left(\frac{7-5}{2}; \frac{2m+n-3}{2}; \frac{-n+m-3}{2}\right)$; $\begin{cases} 2m+n=3, \\ m-n=3; \end{cases} \begin{cases} 3m=6, \\ 3n=-3; \end{cases} \begin{cases} m=2, \\ n=-1. \end{cases}$

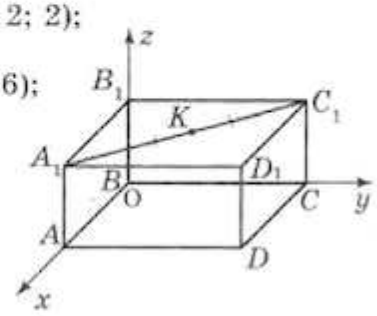
19. 1) $C_1(0; 4; 2)$; $A_1(2; 0; 2)$; $K\left(\frac{0+2}{2}; \frac{4+0}{2}; \frac{2+2}{2}\right)$; $K(1; 2; 2)$;

2) оскільки K — середина A_1C_1, то $K(x; 2; 6)$; $C_1(0; y; 6)$;

$K\left(\frac{0+3}{2}; \frac{0+y}{2}; \frac{6+6}{2}\right)$; $K(1{,}5; 2; 6)$;

$\frac{0+y}{2} = 2$; $y = 4$, отже, $C_1(0; 4; 6)$,

тоді $C(0; 4; 0)$; $D(3; 4; 0)$; $D_1(3; 4; 6)$.



20. Знайдемо координати проекцій точок A і B на координатні площини та довжини проекцій.

xOy: $A(2; 0; 0)$; $B(1; -1; 0)$; $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$;

xOz: $A(0; 0; 3)$; $B(1; 0; -3)$; $|AB| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (3+3)^2} = \sqrt{37}$;

yOz: $A(0; 0; 3)$; $B(0; -1; -3)$; $|AB| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{37}$.

	1) 2 : 3;	2) 1 : 2;	3) 2 : 1;
xOz:	$\lvert BC\rvert = 0{,}6\sqrt{2}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{2}{3}\sqrt{2}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{1}{3}\sqrt{2}$;
xOz:	$\lvert BC\rvert = 0{,}6\sqrt{37}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{2}{3}\sqrt{37}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{1}{3}\sqrt{37}$;
yOz:	$\lvert BC\rvert = 0{,}6\sqrt{37}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{2}{3}\sqrt{37}$;	$\lvert BC\rvert = \frac{1}{3}\sqrt{37}$.

21. $|MB| = |MC|$

$(1-0)^2 + (2-a)^2 + 0^2 = 0^2 + (1-a)^2 + (0-1)^2$;

$1 + 4 - 4a + a^2 = 1 - 2a + a^2 + 1$; $3 = 2a$; $a = 1{,}5$.

aldz.net

22. 1) M — точка, рівновіддалена від точок B, D, D_1, тоді $|MD| = |MD_1| = |MB|$; $M(x; y; z)$.

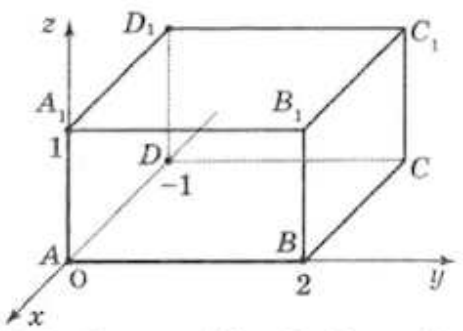
$$\begin{cases}(-1-x)^2+(0-y)^2+(1-z)^2=(-1-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2,\\(-1-x)^2+(0-y)^2+(1-z)^2=(0-x)^2+(2-y)^2+(0-z)^2,\\(-1-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2=(0-x)^2+(2-y)^2+(0-z)^2;\end{cases}$$

$1-2z+z^2=z^2$; $z=0{,}5$;

$$\begin{cases}z=0{,}5,\\1+2x+x^2+y^2+0{,}5^2=x^2+4-4y+y^2+0{,}5^2,\\1+2x+x^2+y^2=x^2+4-4y+y^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}z=0{,}5,\\2x+4y=3;\end{cases}\quad\begin{cases}z=0{,}5,\\x+2y=1{,}5;\end{cases}\quad y=0{,}75-0{,}5x.$$

Отже, $M(x;\ 0{,}75-0{,}5x;\ 0{,}5)$; $x\in R$.



2) N — точка, віддалена від xOz на 1 од. в., $N\in(A_1B_1C_1)$, тому $N(x;\pm1;1)$, $x\in R$;

3) $BT:TD=1:3$; $T(x; y; z)$.

$$x=\frac{0\cdot3+(-1)\cdot1}{3+1}=-\frac{1}{4};\quad y=\frac{2\cdot3+(0)\cdot1}{3+1}=\frac{6}{4};\quad z=0;\quad T\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{2};0\right);$$

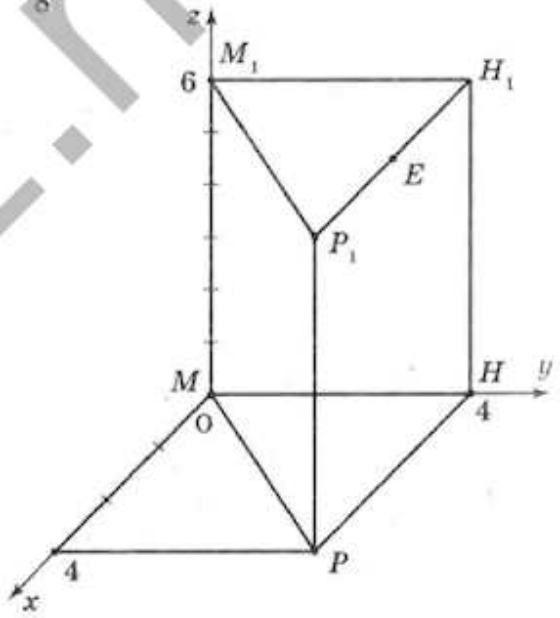
$K\in B_1T$; $TK:B_1K=3:1$; $K(x; y; z)$; $B_1(0; 2; 1)$;

$$x=\frac{-\frac{1}{4}+3\cdot0}{4}=-\frac{1}{16};\quad y=\frac{\frac{3}{2}+2\cdot3}{4}=\frac{7{,}5}{4}=1\frac{7}{8};$$

$$z=\frac{0+1\cdot3}{4}=\frac{3}{4};\quad K\left(-\frac{1}{16};1\frac{7}{8};\frac{3}{4}\right).$$

23. Оскільки $MM_1\subset Oz$, то призма пряма, тоді $P_1(4; 4; 6)$, $H_1(0; 4; 6)$,

$$E\left(\frac{4+0}{2};\frac{4+4}{2};\frac{6+6}{2}\right),\quad E(2; 4; 6).$$



24. $|AB|=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}$;

$|AC|=\sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{1}=1$;

$|BC|=\sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$.

За властивістю трикутника: $|AB|<|AC|+|BC|$,

$\sqrt{6}<1+\sqrt{5}$; $|AC|<|AB|+|BC|$; $1<\sqrt{6}+\sqrt{5}$; $|BC|<|AB|+|AC|$; $\sqrt{5}<\sqrt{6}+1$.

Висновок: трикутник існує.

25. 1) $|AB|=\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{26}$;

$|AC|=\sqrt{(2+1)^2+(3-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{26}$;

$|BC|=\sqrt{(2-3)^2+(3+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{26}$;

$|AB|=|BC|=|AC|$: ΔABC — рівносторонній.

aldz.net

2) $|AB| = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-7)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{144} = 12$;

$|AC| = \sqrt{(3-1)^2 + (-1+3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{24}$;

$|BC| = \sqrt{(-1-1)^2 + (7+3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{120}$; $\left(\sqrt{120}\right)^2 + \left(\sqrt{24}\right)^2 = \left(\sqrt{144}\right)^2$;

отже, ΔABC — прямокутний, $\angle C = 90°$;

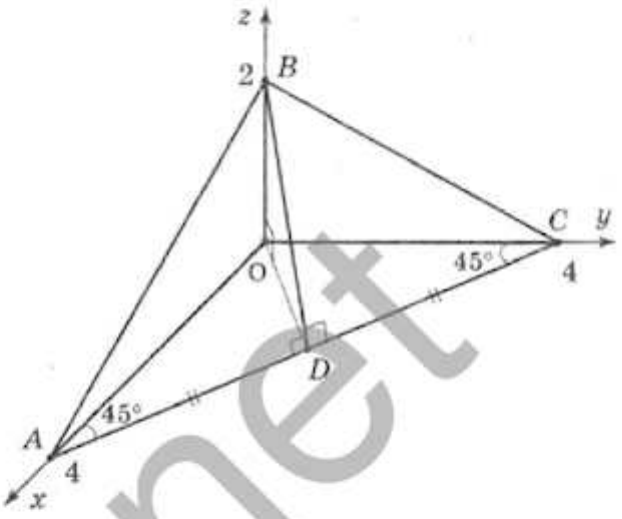
3) $|AB| = \sqrt{0^2 + a^2 + a^2} = |a|\sqrt{2}$; $|BC| = \sqrt{a^2 + a^2 + 0^2} = |a|\sqrt{2}$;

$|AC| = \sqrt{a^2 + 0^2 + a^2} = |a|\sqrt{2}$; $|AB| = |BC| = |AC|$; ΔABC — рівносторонній.

26. 1) Оскільки $A(4; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, то ΔOAC — рівнобедрений прямокутний, отже, $\angle A = \angle C = 45°$.

2) Проведемо $OD \perp AC$. Оскільки $B \in Oz$, то $OB \perp xOy$, BD — похила, OD — проекція, тому $DB \perp AC$ (за теоремою про три перпендикуляри). Звідси $AC \perp (BOD)$, тоді $\angle ODB = \angle((AOC), (BAC))$.

ΔAOC — рівнобедрений прямокутний (п. 1), OD — висота, бісектриса, медіана;



$$AD = DC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

У ΔAOD: $\angle D = 90°$, $\angle A = 45°$,

$AO = 4$, $AD = DO = 2\sqrt{2}$.

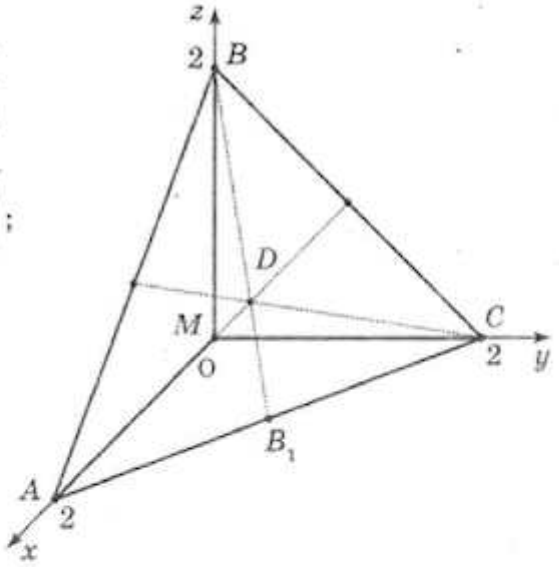
У ΔBOD: $\angle O = 90°$, $BO = 2$, $OD = 2\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\angle D = \frac{BO}{OD}$; $\operatorname{tg}\angle D = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\angle D = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

27. $|AB| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $|BC| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $|AC| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$;

то ΔABC — рівносторонній.

Оскільки $OA = OB = OC$, то точка O проектується в центр правильного ΔABC — точку D, тоді $OD \perp (ABC)$, $|OD|$ — шукана відстань.



B_1 — середина AC, $B_1\left(\frac{2+0}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$;

$B_1(1; 1; 0)$; BB_1 — медіана трикутника.

D — точка перетину медіан, тоді $BD : DB_1 = 2 : 1$.

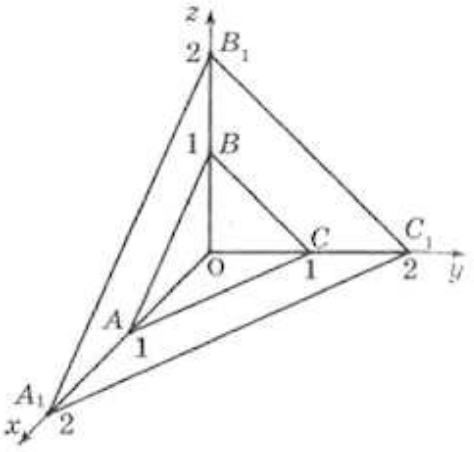
$D(x; y; z)$; $x = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$;

$y = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$; $z = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$;

$$|OD| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$ отже, $|OD| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

alaz.net

28. ΔABC; $\Delta A_1B_1C_1$ — рівносторонні;
$OA = OB = OC$; $OA_1 = OB_1 = OC_1$.
1) ΔAOB — прямокутний, рівнобедрений,
$\angle A = \angle B = 45°$;
ΔA_1OB_1 — прямокутний рівнобедрений,
$\angle A_1 = B_1 = 45°$;
У площині xOz: $\angle BAO = \angle B_1A_1O = 45°$,
це відповідні кути при прямих AB і A_1B_1
і січній OX, отже, $AB \parallel A_1B_1$.
Аналогічно $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$. Звідки
$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ (за ознакою паралельності площин).



Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини, то такі площини *паралельні*.

2) Оскільки $OA = OB = OC$, $OA_1 = OB_1 = OC_1$, то точка O проектується в центри правильних трикутників (див. задачу № 27).

Позначимо D і D_1 — відповідні центри ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$. Тоді $D\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $D_1\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. $|DD_1| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — відстань між центрами цих трикутників, бо відповідні перпендикуляри до даних площин належать одній прямій. Отже, $|DD_1| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

29. За умовою $KC \perp CP$, $KC \perp CO$, отже, $KC \perp (PCO)$; $KC \perp (xOy)$. KP — похила, CP — проекція. Оскільки $KP \perp OP$, то $CP \perp OP$ (за теоремою про три перпендикуляри). $KP \perp OY$, $CP \perp OY$.
У ΔPOC: $\angle O = 90°$, $\angle O = 30°$, $\angle C = 60°$, $PC = 4$, $CO = 8$.

Проти кута 30° у прямокутному трикутнику лежить катет, що дорівнює половині гіпотенузи.

$PO = OC \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

У ΔPOK: $\angle P = 90°$, $\angle O = 45°$, $\angle K = 45°$, отже, це прямокутний рівнобедрений трикутник, $OP = PK = 4\sqrt{3}$; $OK^2 = OP^2 + PK^2$; $OK^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2$; $OK = 4\sqrt{6}$.
У ΔPKC: $\angle C = 90°$, за теоремою Піфагора:
$CK^2 = KP^2 - PC^2$; $CK^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4^2$; $CK = 4\sqrt{2}$.
Тому $P\left(0; 4\sqrt{3}; 0\right)$; $C\left(4; 4\sqrt{3}; 0\right)$; $K\left(4; 4\sqrt{3}; 4\sqrt{2}\right)$.
M — середина KP, отже, $M\left(\frac{0+4}{2}; \frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{2}; \frac{0+4\sqrt{2}}{2}\right)$; $M\left(2; 4\sqrt{3}; 2\sqrt{2}\right)$.
$T \in OC$, $OT : TC = 2 : 1$, тому
$T\left(\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 4}{3}; \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 4\sqrt{3}}{3}; \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{3}\right)$; $T\left(\frac{8}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{3}; 0\right)$.
$|MT| = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3} - 4\sqrt{3}\right)^2 + \left(0 - 2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} =$

ala7.net

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{48}{9} + 8} = \sqrt{\frac{52}{9} + \frac{72}{9}} = \sqrt{\frac{124}{9}} = \frac{\sqrt{124}}{3} = \frac{\sqrt{4 \cdot 31}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{31}.$$

Отже: $M\left(2; 4\sqrt{3}; 2\sqrt{2}\right)$; $|MT| = \frac{2}{3}\sqrt{31}$.

30. 1) $|AB| = \sqrt{(5+1)^2 + 0^2 + (1-1)^2} = \sqrt{36} = 6$;

$|BC| = \sqrt{(2-5)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{36} = 6$;

$|AC| = \sqrt{(2+1)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{36} = 6$;

$|SA| = \sqrt{(2+1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16} = 4$;

$|SB| = \sqrt{(2-5)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16} = 4$;

$|SC| = \sqrt{(2-2)^2 + \left(3\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16} = 4$;

$|AB| = |BC| = |AC|$; $|SA| = |SB| = |SC|$, отже, піраміда правильна.

2) K — середина AC; $K\left(\frac{2-1}{2}; \frac{3\sqrt{3}+0}{2}; \frac{1+1}{2}\right)$; $K\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

31. Оскільки основа тетраедра належить площині xOy, то $C(x; y; 0)$, ΔABC — рівносторонній, тому $AB = BC = AC$.

$|AC|^2 = (x-1)^2 + y^2$; $|BC|^2 = (x+1)^2 + y^2$; $(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2$;

$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$; $x = 0$.

$|AB| = 2$; $|AC|^2 = 1^2 + y^2$; $y^2 + 1 = 4$; $y^2 = 3$; $y = \pm\sqrt{3}$, тобто $C_1\left(0; \sqrt{3}; 0\right)$ або $C_2\left(0; -\sqrt{3}; 0\right)$ — третя вершина основи тетраедра.

$D(x; y; z)$ — четверта вершина. Оскільки тетраедр правильний, то $AD = BD = CD = AB = BC = AC = 2$.

Для тетраедра $DABC_1$:

$AD^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ (1)

$BD^2 = (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ (2)

$CD^2 = x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 + z^2 = 4$ (3)

Маємо: $(x-1)^2 = (x+1)^2$ (з 1 і 2 рівнянь), звідси $x = 0$.

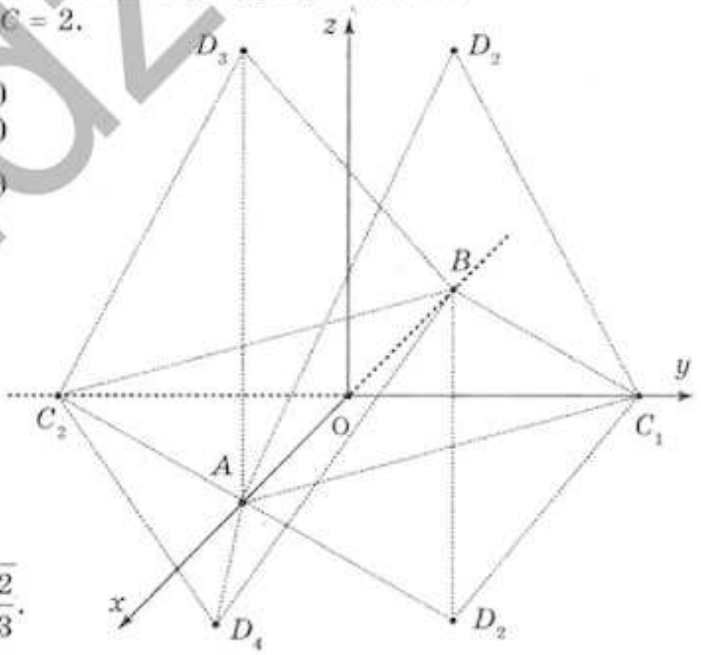
$(x+1)^2 + y^2 = x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2$ (з 2 і 3 рівнянь),

$1 + y^2 = y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$;

$2\sqrt{3}y = 2$; $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Підставимо в (1):

$1^2 + \frac{1}{3} + z^2 = 4$; $z^2 = \frac{8}{3}$; $z = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.



Отже, $D_1\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $D_2\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

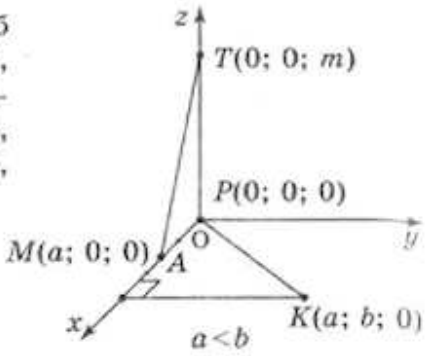
Аналогічно для тетраедра $DABC_2$ маємо:

$D_3\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}; 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $D_4\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Отже, таких тетраедрів існує чотири.

alldz.net

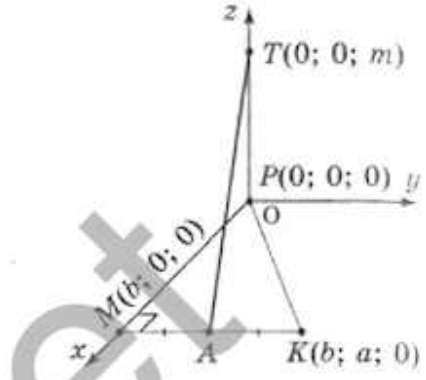
32. Введемо прямокутну систему координат так, щоб відрізок PT належав осі Oz, катет PM — осі Ox, точка K — площині xOy. У цій системі координат точкам відповідають координати: $P(0;\ 0;\ 0)$, $T(0;\ 0;\ m)$; $M(a;\ 0;\ 0)$, $K(a;\ b;\ 0)$ $(a < b)$ або $M(b;\ 0;\ 0)$, $K(b;\ a;\ 0)$.



Якщо A — середина MP,

то $A\left(\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right)$, $|AT| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 0^2 + m^2}$;

$$|AT| = \sqrt{\frac{a^2 + 4m^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4m^2}.$$



Якщо A — середина MK,

то $A\left(b;\ \frac{a}{2};\ 0\right)$, $|AT| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2}$;

$$|AT| = \sqrt{\frac{a^2 + 4b^2 + 4m^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2 + 4m^2}.$$

33. Введемо прямокутну систему координат так, щоб початок координат збігався з точкою A, ребра AD, AB, AA_1 належали координатним осям Ox, Oy, Oz відповідно. Тоді $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 1;\ 0)$, $D(1;\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 1)$, $B_1(0;\ 1;\ 1)$, $C_1(1;\ 1;\ 1)$, $D_1(1;\ 0;\ 1)$.

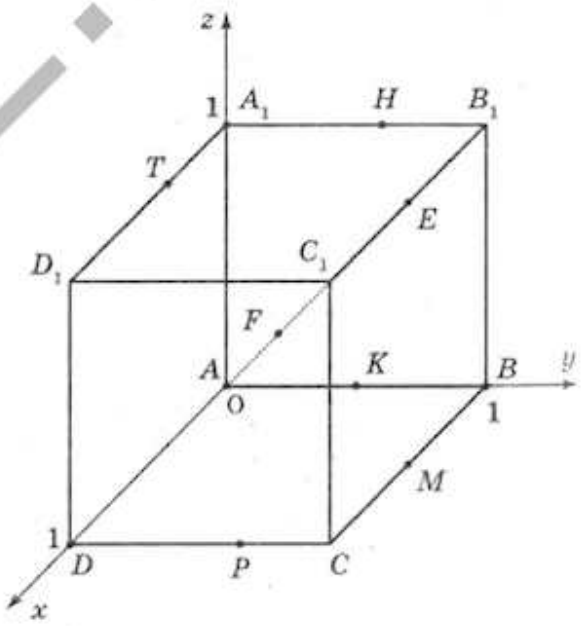
1) K — середина AB,

$K\left(\frac{0+0}{2};\ \frac{0+1}{2};\ \frac{0+0}{2}\right)$; $K\left(0;\ \frac{1}{2};\ 0\right)$;

E — середина C_1B_1,

$E\left(\frac{1+0}{2};\ \frac{1+1}{2};\ \frac{1+1}{2}\right)$; $E\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$.

$$|KE| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{1{,}5};$$



2) $K\left(0;\ \frac{1}{2};\ 0\right)$ — середина AB;

F — середина DB_1;

$F\left(\frac{0+1}{2};\ \frac{0+1}{2};\ \frac{0+1}{2}\right)$; $F\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

$$|KF| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{0{,}5};$$

3) M — середина BC; $M\left(\frac{0+1}{2};\ \frac{1+1}{2};\ \frac{0+0}{2}\right)$; $M\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right)$.

$T \in A_1D_1$; $A_1T : TD_1 = 2 : 3$; $T(x;\ y;\ z)$. $x = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{2}{5}$; $y = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{5} = 0$;

$z = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{5} = 1$; $T\left(\frac{2}{5};\ 0;\ 1\right)$; $|TM| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2{,}01}$;

alaz.net

4) $P \in DC$; $DP : PC = 2$; $P(x; y; z)$.

$x = \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{3} = 1$; $y = \dfrac{2 \cdot 1 + 0}{3} = \dfrac{2}{3}$; $z = \dfrac{2 \cdot 0 + 0}{3} = 0$; $P\left(1; \dfrac{2}{3}; 0\right)$;

$H \in A_1B_1$; $A_1H : HB_1 = 3 : 2$; $H(x; y; z)$; $x = \dfrac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 0}{5} = 0$; $y = \dfrac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{5} = \dfrac{3}{5}$;

$z = \dfrac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{5} = 1$; $H\left(0; \dfrac{3}{5}; 1\right)$; $|PH| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{5}\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\dfrac{31}{15}}$.

34. 1) Знайдемо довжини бічних ребер піраміди.

$|SA| = \sqrt{(4+1)^2 + (0-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$;

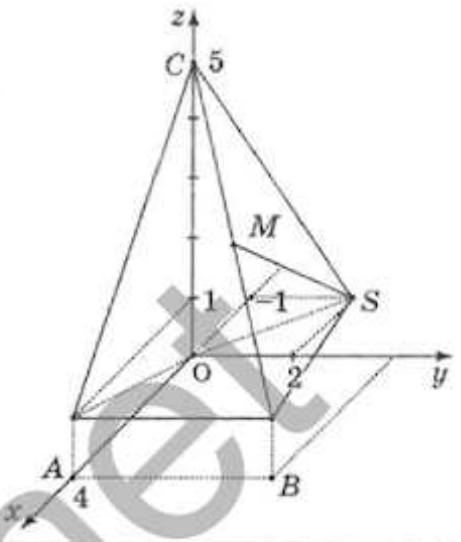
$|SB| = \sqrt{(4+1)^2 + (4-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{30}$;

$|SC| = \sqrt{(0+1)^2 + (0-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30}$.

Оскільки всі бічні ребра піраміди рівні, то є рівними трикутники, утворені висотою піраміди SM, бічними ребрами і проекціями бічних ребер на основу.

$SM \perp (ABC)$, $\angle SMO = \angle SMB = \angle SMC = 90°$;

$SA = SB = SC$; $MA = MB = MC$, тоді $\Delta SAM = \Delta SBM = \Delta SCM$; $\angle SAM = \angle SBM = \angle SCM$.



Кут між прямою і площиною — це кут між прямою та її проекцією на дану площину.

2) Встановимо вид ΔABC. $|AB| = \sqrt{(4-4)^2 + 4^2 + (1-1)^2} = 4$;

$|BC| = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2 + (1-5)^2} = 4\sqrt{3}$; $|AC| = \sqrt{(4-0)^2 + 0^2 + (1-5)^2} = 4\sqrt{2}$.

Оскільки $\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 4^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$, $32 + 16 = 48$, то за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, маємо: ΔABC — прямокутний, BC — гіпотенуза, $\angle A = 90°$.

SM — висота піраміди, $MA = MB = MC$ (з п. 1), то M — центр кола, описаного навколо ΔABC, — середина гіпотенузи BC, тоді $M\left(\dfrac{4+0}{2}; \dfrac{4+0}{2}; \dfrac{1+5}{2}\right)$; $M(2; 2; 3)$.

§ 2. Метод координат. Рівняння сфери, площини, прямої

ПОЯСНЕННЯ

Рівняння сфери з центром $O(a; b; c)$ радіуса R:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Загальне рівняння площини:
$ax + by + cz + d = 0$, де a, b, c, d — числові коефіцієнти.

Рівняння площини у відрізках:
$\dfrac{x}{k_x} + \dfrac{y}{k_y} + \dfrac{z}{k_z} = 1$, де k_x, k_y, k_z — координати точок перетину площини з відповідними осями координат.

Загальне рівняння прямої (як лінія перетину двох площин):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$:

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

alex.net

Завдання 2

1. 1) Центр $O(0; 0; 0)$, $R = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — рівняння сфери;
2) центр $O(0; 0; 0)$, $R = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
3) центр $O(1; 1; 1)$, $R = 1$; $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$;
4) центр $O(1; 1; -1)$, $R = 1$; $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1$.

2. 1) $R = 2$; $P(0; 0; 0)$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ — рівняння сфери; $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ — формула кулі;
2) $R = 5$; $P(1; 0; 2)$; $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 25$ — рівняння сфери;
$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 \le 25$ — формула кулі;
3) $R = 3$; $P(-2; 3; -1)$; $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$ — рівняння сфери;
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 \le 9$ — формула кулі.

3. 1) $O(0; 0; 0)$; $0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4$; $2 \ne 4$; ні;
2) $T(1; 0; 1)$; $1^2 + (-1)^2 + (1 + 1)^2 = 4$; $6 \ne 4$; ні;
3) $C(0; 1; 1)$; $0^2 + (1 - 1)^2 + (1 + 1)^2 = 4$; $4 = 4$; так.

4. 1) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$; $x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = 1$; $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$; так, центр $O(1; 0; 0)$, $R = 1$;
2) $x^2 - 2x + y^2 = 3$; $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 3 + 1$; $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; ні (це рівняння кола з центром $O(1; 0; 0)$ і $R = 2$);
3) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 2z = -1$;
$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 = -1 + 1 + 4 + 1$;
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 5$; так, центр $O(1; -2; 1)$, $R = \sqrt{5}$;
4) $x^2 + y^2 - y + z^2 - z = 0{,}5$; $x^2 + y^2 - y + 0{,}5^2 + z^2 - z + 0{,}5^2 = 0{,}5 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2$;
$x^2 + (y - 0{,}5)^2 + (z - 0{,}5)^2 = 1$; так, центр $O(0; 0{,}5; 0{,}5)$, $R = 1$.

5. 1) $A(0; 0; 0)$; $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 + 1 = 0$; $0 + 1 = 0$; $1 \ne 0$; ні;
2) $B(-1; 0; 1)$; $2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 + 1 + 1 = 0$; $-2 + 2 = 0$; $0 = 0$; так;
3) $C(0; 0; -1)$; $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 1 + 1 = 0$; $-1 + 1 = 0$; $0 = 0$; так.

> Якщо в рівнянні площини $a = b = d = 0$, то площина $cz = 0$ або $z = 0$ збігається з площиною xOy.
> Аналогічно: $ax = 0$ або $x = 0$ — рівняння площини yOz, $by = 0$ або $y = 0$ — рівняння площини xOz.

6. 1) xOy: $cz = 0$; yOz: $ax = 0$; xOz: $by = 0$
2) Якщо розглядати пряму як лінію перетину двох площин, то:

вісь Ox — лінія перетину xOy і xOz, тобто $\begin{cases} cz = 0, \\ by = 0; \end{cases}$

вісь Oy — лінія перетину xOy і yOz, тобто $\begin{cases} cz = 0, \\ ax = 0; \end{cases}$

вісь Oz — лінія перетину xOz і yOz, тобто $\begin{cases} ax = 0, \\ by = 0. \end{cases}$

7. 1) Оскільки площина містить вісь Ox, то $a = d = 0$, $b \ne 0$, $c \ne 0$, тобто $by + cz = 0$.
2) Оскільки площина містить вісь Oy, то $b = d = 0$, $a \ne 0$, $c \ne 0$, тобто $ax + cz = 0$.
3) Оскільки площина містить вісь Oz, то $c = d = 0$, $a \ne 0$, $b \ne 0$, тобто $ax + by = 0$.

8. Якщо площина віддалена від осі Ox і від осі Oy на 1, то її рівняння має вид: $z = 1$ або $z = -1$.

9. Нехай A, B, C — точки перетину даної площини з осями координат — Ox, Oy, Oz відповідно. Тоді $A(x; 0; 0)$, $B(0; y; 0)$, $C(0; 0; y)$.

1) $2x - 3x + 3x - 1 = 0$; $2x - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1 = 0$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; $A\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$;

alloz.net

1) $3x - 3y + 2z - 1 = 0$; $3x - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0$; $3x = 1$; $x = \frac{1}{3}$; $A\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$;

$3 \cdot 0 + 3y + 2 \cdot 0 - 1 = 0$; $-3y = 1$; $y = -\frac{1}{3}$; $B\left(0; -\frac{1}{3}; 0\right)$;

$3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2z - 1 = 0$; $2z - 1 = 0$; $2z = 1$; $z = \frac{1}{2}$; $C\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$;

2) $2x - 3y + z + 1 = 0$; $2x - 3 \cdot 0 + 0 + 1 = 0$; $2x + 1 = 0$; $2x = -1$;

$x = -\frac{1}{2}$; $A\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$;

$2 \cdot 0 - 3y + 0 + 1 = 0$; $-3y + 1 = 0$; $-3y = -1$; $y = \frac{1}{3}$; $B\left(0; \frac{1}{3}; 0\right)$;

$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + z + 1 = 0$; $z + 1 = 0$; $z = -1$; $C(0; 0; -1)$.

10. 1) $z = 0$ — площина xOy.
2) $y = 1$ — площина, паралельна xOz, проходить через точку (0; 1; 0).
3) $z = -2$ — площина, паралельна xOy, проходить через точку (0; 0; −2).
4) $x = 3$ — площина, паралельна yOz, проходить через точку (3; 0; 0).
5) $x + y = 0$ — площина містить вісь Oz і пряму $x = -y$ — бісектрису кута між променем OX і від'ємною піввіссю OY.
6) $x + z + 1 = 0$ — площина, паралельна осі Oy, проходить через точки (−1; 0; 0) і (0; 0; −1).
7) $x + y + z = 1$ — площина, що проходить через точки (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1).

11. 1) Площина, віддалена від xOy на 2: $z = \pm 2$.
2) Площина, віддалена від yOz на 3: $x = \pm 3$.
3) Площина, віддалена від xOz на 1; $y = \pm 1$.

12. 1) Площина, яка перпендикулярна до осі Ox, є паралельною до площин yOz: $x + d = 0$.
2) Площина, яка перпендикулярна до осі Oy, є паралельною до площин xOz: $y + d = 0$.
3) Площина, яка перпендикулярна до осі Oz, є паралельною до площин xOy: $z + d = 0$.
4) Площина, яка перпендикулярна до осі xOy, є паралельною до осі Oz, $c = 0$: $ax + by + d = 0$.
5) Площина, яка перпендикулярна до осі yOz, є паралельною до осі Ox, $a = 0$: $by + cz + d = 0$.
6) Площина, яка перпендикулярна до осі xOz, є паралельною до осі Oy, $b = 0$: $ax + cz + d = 0$.
7) Площина, яка перпендикулярна до осі xOz і площини yOz, є паралельною до площини xOy: $z + d = 0$.
Залежно від значень a, b, c, d кожна з задач має безліч розв'язків.

13. 1) $K(0; 1; 0)$. Можливі такі випадки: якщо площина проходить через точку K, то вона:
— перпендикулярна до осі Oy, тоді $y = 1$ або $y - 1 = 0$;
— співпадає з площиною xOy і перпендикулярна до осі Oz, тоді $z = 0$;
— співпадає з площиною yOz і перпендикулярна до осі Ox, тоді $x = 0$.
2) $M(2; 2; 2)$. Можливі такі випадки: якщо площина проходить через точку M, то вона:
— перпендикулярна до осі Ox: $x - 2 = 0$ або $x = 2$;
— перпендикулярна до осі Oy: $y - 2 = 0$ або $y = 2$;
— перпендикулярна до осі Oz: $z - 2 = 0$ або $z = 2$.
3) $H(4; 4; 0)$. Можливі такі випадки: якщо площина проходить через точку H,

aldz.net



то вона:
— перпендикулярна до осі Ox: $x - 4 = 0$ або $x = 4$;
— перпендикулярна до осі Oy: $y - 4 = 0$ або $y = 4$;
— перпендикулярна до осі Oz і співпадає з площиною xOy: $z = 0$.

14. Позначимо $M(x; y; z)$ — довільна точка шуканої площини, кожна точка якої рівновіддалена від заданих точок A і B. Тоді $|AM| = |MB|$; $|AM|^2 = |MB|^2$.
1) $A(0; 0; -3)$; $B(0; 2; 0)$
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z + 3)^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2$;
$x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2$; $6z + 4y + 9 - 4 = 0$; $4y + 6z + 5 = 0$;

2) $A(1; 0; 1)$; $B(0; 1; 1)$
$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$;
$x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$;
$-2x = -2y$; $-2x + 2y = 0$; $x - y = 0$;

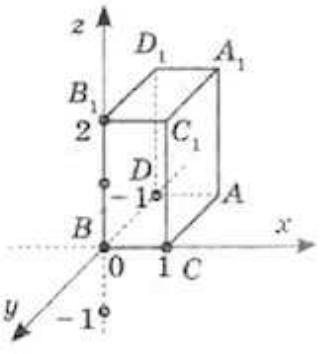
3) $A(1; -1; -3)$; $B(3; 2; -1)$
$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2$;
$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1$;
$-2x + 2y + 6z + 1 = -6x - 4y + 4 + 2z$;
$-2x + 6x + 2y + 4y + 6z - 2z + 1 - 4 = 0$; $4x + 6y + 4z - 3 = 0$.

Дві площини, перпендикулярні до однієї прямої, між собою паралельні.

15. 1) Площини $x = 2$ і $x = 5$ є перпендикулярними до Ox, отже, є паралельними.
2) $x + y = 1$ і $z = 1$.
Площина $x + y = 1$ є паралельною до осі Oz, а площина $z = 1$ є перпендикулярною до осі Oz, отже, ці площини перпендикулярні.
3) $x + y = -1$; $y + z = -1$.
Площина $x + y = -1$ є паралельною до осі Oz і перпендикулярною до площини xOy.
Площина $y + z = -1$ є паралельною до осі Ox і перпендикулярною до площини yOz, отже, дані площини перпендикулярні.

16. 1) $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$.
За рівнянням площини у відрізках: $x + y + z = 1$.
2) $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -1)$.
За рівнянням площини у відрізках: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{1} = 1$ $3x + 2y - 6z - 6 = 0$.

17. Оскільки $BB_1 \subset Oz$, то даний паралелепіпед є прямим, $AD \perp OX$, то паралелепіпед $ACBDA_1C_1B_1D_1$ — прямокутний ($D(-1; 0; 0)$, $A(-1; 1; 0)$).
Таким чином, $(ABC) = (XOY)$, відповідне рівняння $z = 0$.
$(A_1C_1B_1) \perp OZ$, відповідне рівняння $z = 2$.
$(BCC_1) = (YOZ)$, відповідне рівняння $x = 0$.
$(ADA_1) \perp OX$, відповідне рівняння $x = -1$.
$(BDB_1) = (XOZ)$, відповідне рівняння $y = 0$.
$(AA_1C) \perp OY$, відповідне рівняння $y = 1$.



18. Оскільки пряма — це лінія перетину двох площин, то: вісь OX: $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ вісь Oy: $\begin{cases} x = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ вісь Oz: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

19. 1) Пряма, перпендикулярна до xOy: $\begin{cases} x = a, \\ y = b; \end{cases}$

alez.net

пряма, перпендикулярна до yOz: $\begin{cases} y = b, \\ z = c; \end{cases}$

пряма, перпендикулярна до xOz: $\begin{cases} x = a, \\ z = c. \end{cases}$

2) Пряма, перпендикулярна до осі Ox, є паралельною до площини yOz:

$\begin{cases} x = a, \\ y = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = a, \\ z = 0, \end{cases}$ $a \neq 0$.

3) Пряма, перпендикулярна до осі Ox і осі Oy: $\begin{cases} x = a, \\ y = b, \end{cases}$ $a \neq 0$, $b \neq 0$.

20. 1) $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x - 2y + z = 0; \end{cases} \Big| +, - \quad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x - y = 1, \\ 3y - 2z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x = 1 + y, \\ 2z = 3y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ x = \dfrac{1+y}{2}, \\ z = \dfrac{3y-1}{2}. \end{cases}$

Якщо $y = 1$, то $x = \dfrac{1+1}{2} = 1$; $z = \dfrac{3 \cdot 1 - 1}{2} = 1$.

Точка (1; 1; 1) — одна з точок, загальний вигляд $\left(\dfrac{1+y}{2}; y; \dfrac{3y-1}{2}\right)$.

2) $\begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0, \\ x - 2y + z - 2 = 0; \end{cases} \Big| +, - \quad \begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 7y - 3z + 5 = 0, \\ x - 2y + z - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 1 - y, \\ 3z = 7y - 5, \\ x - 2y + z - 2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{1-y}{3}, \\ z = \dfrac{7y-5}{3}, \\ x - 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$

Якщо $y = 1$, то $x = 0$, $z = \dfrac{2}{3}$, точка $\left(0; 1; \dfrac{2}{3}\right)$ — одна з точок.

Загальний вигляд $\left(\dfrac{1-y}{3}; y; \dfrac{7y-5}{3}\right)$.

21. 1) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases}$ (1) і $\begin{cases} y = 2, \\ z = 3; \end{cases}$ (2). Пряма, задана системою (1), паралельна осі Oz; пряма, задана системою (2), паралельна осі Ox. Оскільки спільних точок прямі не мають, то вони є мимобіжними.

2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 1; \end{cases}$ (1) і $\begin{cases} x + z = 1, \\ y = 1; \end{cases}$ (2). Розв'яжемо систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 1, \\ x + z = 1, \\ y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} z = 1, \\ y = 1, \\ x = 0; \end{cases}$

(0; 1; 1) — точка перетину прямих, отже, прямі перетинаються.

22. 1) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$ і $x - y = 1$; $1 - 1 \neq 1$. Отже, прямі і площина паралельні.

2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 1 \end{cases}$ і $y = 3$; $x + 3 = 1$; $x = -2$.

Отже, (−2; 3; 1) — точка перетину прямої і площини.

aldz.net

23. 1) $\dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z-2}{3}$.

Маємо: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = y+1, \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}; \end{cases} \begin{cases} x-1 = 2y+2, \\ 3x-3 = 2z-4; \end{cases} \begin{cases} 2y = x-3, \\ 2z = 3x+1; \end{cases} \begin{cases} y = \dfrac{x-3}{2}, \\ z = \dfrac{3x+1}{2}. \end{cases}$

При $x = 1$: $y = \dfrac{1-3}{2} = -1$; $z = \dfrac{3\cdot 1+1}{2} = 2$; $(1; -1; 2)$.

При $x = -1$: $y = \dfrac{-1-3}{2} = -2$; $z = \dfrac{3\cdot(-1)+1}{2} = -1$; $(-1; -2; -1)$.

Загальний вигляд точки: $\left(x; \dfrac{x-3}{2}; \dfrac{3x+1}{2}\right)$.

2) $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

Маємо: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{2}, \\ \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{z+2}{3}; \end{cases} \begin{cases} 2x+2 = -2y+2, \\ 3x+3 = -2z-4; \end{cases} \begin{cases} 2y = -2x, \\ 2z = -7-3x; \end{cases} \begin{cases} y = -x, \\ z = \dfrac{-7-3x}{2}. \end{cases}$

При $x = 1$: $y = -1$; $z = \dfrac{-7-3}{2} = -5$; $(1; -1; -5)$.

При $x = -1$: $y = 1$; $z = \dfrac{-7+3}{2} = -2$; $(-1; 1; -2)$.

Загальний вигляд точки: $\left(x; -x; \dfrac{-7-3x}{2}\right)$.

24. Якщо точки лежать на одній прямій, то $\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ (наслідок теореми 2).

1) $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; -2)$, $C(0; 0; 2)$.

$\dfrac{0-0}{0-0} = \dfrac{0-0}{0-0} = \dfrac{2-0}{-2-0}$; $\dfrac{0}{0} = \dfrac{0}{0} = -1$; точки належать осі Oz.

Або $B \in Oz$, $C \in Oz$, $A \in Oz$. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

2) $A(-1; 1; 1)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 1; 1)$.

$\dfrac{1+1}{0+1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{1-1}{1-1}$; $2 = \dfrac{0}{0} = \dfrac{0}{0}$; точки належать прямій $\begin{cases} y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

$y_1 = y_2 = y_3 = 1$; $z_1 = z_2 = z_3 = 1$.

3) $A(-1; 2; 3)$, $B(1; -2; -3)$, $C(1; 1; 1)$.

$\dfrac{1+1}{1+1} = \dfrac{1-2}{-2-2} = \dfrac{1-3}{-3-3}$; $1 \neq \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{2}{6}$; $1 \neq \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{3}$.

Точки не лежать на одній прямій.

4) $A(-1; 0; 1)$, $B(2; 3; -2)$, $C(5; 1; -1)$.

$\dfrac{5+1}{2+1} = \dfrac{1-0}{3-0} = \dfrac{-1-1}{-2-1}$; $\dfrac{6}{3} \neq \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{2}{3}$. Точки не лежать на одній прямій.

5) $A(8; 1; 5)$, $B(13; -2; 12)$, $C(-2; -1; -9)$.

$\dfrac{-2-8}{13-8} = \dfrac{-1-1}{-2-1} = \dfrac{-9-5}{12-5}$; $\dfrac{-10}{5} \neq \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{-14}{7}$. Точки не лежать на одній прямій.

aldz.net

25. Складемо і розв'яжемо систему:

1) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z-2}{3}, \\ x-y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = y+1, \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}, \\ x=y; \end{cases}$ $\begin{cases} x-1 = 2y+2, \\ 3x-3 = 2z-4, \\ x=y; \end{cases}$ $\begin{cases} y-1 = 2y+2, \\ 3x-3 = 2z-4, \\ x=y; \end{cases}$

$\begin{cases} y=-3, \\ x=-3, \\ -9-3 = 2z-4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3, \\ y=-3, \\ z=-4. \end{cases}$

Отже, $(-3; -3; -4)$ — точка перетину прямої і площини.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}, \\ x+y+z=1; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{2}, \\ \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{z+2}{3}, \\ x+y+z=1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2 = -2y+2, \\ 3x+3 = -2z-4, \\ x+y+z=1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x, \\ 2z = -3z-7, \\ x+y+z=1; \end{cases}$

$\begin{cases} y=-x, \\ z=\dfrac{-3x-7}{2}, \\ x+(-x)+\dfrac{-3x-7}{2}=1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x, \\ z=\dfrac{-3x-7}{2}, \\ -3x-7=2; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x, \\ -3x=9, \\ z=\dfrac{-3x-7}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3, \\ y=3, \\ z=1. \end{cases}$

Отже, $(-3; 3; 1)$ — точка перетину прямої і площини.

26. Якщо пряма і сфера перетинаються, то система має розв'язки:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{1}, \\ x^2+y^2+z^2=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x+1 = 2z+2, \\ y-1 = 2z+2, \\ x^2+y^2+z^2=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2z+1, \\ y = 2z+3, \\ (2z+1)^2+(2z+3)^2+z^2=20; \end{cases}$

$4z^2+4z+1+4z^2+12z+9+z^2=20$; $9z^2+16z-10=0$;

$D = 16^2 - 4\cdot 9\cdot(-10) = 256+360 = 616 > 0$. Рівняння має корені, отже, система має розв'язки, отже, пряма і сфера перетинаються.

2) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z-2}{2}, \\ x^2+y^2+z^2=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x-1 = 2y+2, \\ z-2 = 2y+2, \\ x^2+y^2+z^2=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y+3, \\ z = 2y+4, \\ (2y+3)^2+y^2+(2y+4)^2=4; \end{cases}$

$4y^2+12y+9+y^2+4y^2+16y+16=4$; $9y^2+28y+21=0$;

$D = 28^2 - 4\cdot 9\cdot 21 = 784-756 = 28 > 0$. Рівняння має корені, отже, система має розв'язки, отже, пряма і сфера перетинаються.

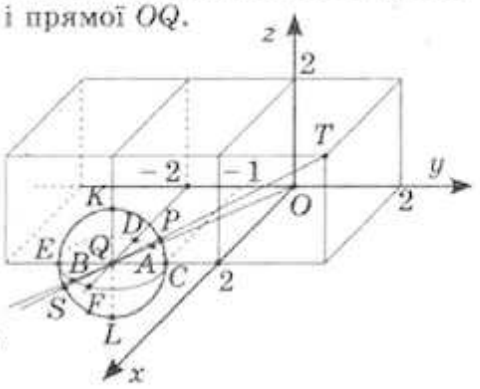
27. Рівняння $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=1$ задає сферу з центром $Q(2; -2; 0)$ і $R=1$.

1) Центр сфери належить площині xOy. Найближчою і найвіддаленішою до початку координат будуть точки перетину сфери і прямої OQ.

Рівняння прямої: $\dfrac{x-2}{0-2} = \dfrac{y+2}{0+2} = \dfrac{0-0}{0-0}$;

$\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+2}{2}$; $x-2 = -y-2$.

Розв'яжемо систему: $\begin{cases} x=-y, \\ z=0, \\ (x-2)^2+(y+2)^2+z^2=1; \end{cases}$



$(x-2)^2+(-x+2)^2=1$;

ala.net

$2(x-2)^2=1;\ (x-2)^2=1;\ (x-2)^2=\frac{1}{2};\ x-2=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ x=2\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ y=-2\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Звідки $A\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2};-2+\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ — найближча точка до $O(0;0;0)$.

2) $B\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2};-2-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ — найвіддаленіша точка від $O(0;0;0)$ (з п. 1).

3) Центр кулі належить площині xOy, яка є перпендикулярною до площин xOz і yOz, містить прямі OX і OY і перпендикулярна до прямої OZ.
Проводимо $QM\perp OX$; $QN\perp OY$, маємо: $QM\perp(xOz)$, $QN\perp(yOz)$.
$|QM|=|QN|=2$; $M(2;0;0)$, $N(0;-2;0)$. C і D — відповідні точки перетину QM і QN зі сферою. Оскільки $R=1$, то C — середина QM, D — середина QN, звідки $C(2;-1;0)$ і $D(-1;-2;0)$ — точки сфери, найближчі до площин xOz і yOz відповідно.
Найближчими до площини xOy є точки великого кола сфери, яке є перетином сфери і xOy.
Рівняння кола: $(x-2)^2+(y+2)^2=1$.
4) E і F — точки перетину QM і QN зі сферою, $R=1$; $|ME|=3$; $|NF|=3$, отже, $E(2;-3;0)$, $F(3;-2;0)$ — найвіддаленіші точки від сфери до площин xOy і yOz відповідно.
Найвіддаленіші точки сфери від площини xOy — кінці діаметра, перпендикулярного xOy, $R=1$, тому $K(2;-2;1)$, $L(2;-2;-1)$.
5) Найближчі до координатних осей:
до Ox: точка $C(2;-1;0)$ (п. 3);
до Oy: точка $D(-1;-2;0)$ (п. 3);
до Oz: точка $A\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2};-2+\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ (п. 1).

6) Найвіддаленіші від координатних осей:
від Ox: точка $E(2;-3;0)$ (п. 4);
від Oy: точка $F(3;-2;0)$ (п. 4);
від Oz: точка $B\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2};-2-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ (п. 2).

7) Знайдемо точки перетину сфери і прямої TQ, $T(2;2;2)$.
$\frac{x-2}{2-2}=\frac{y+2}{2+2}=\frac{z-0}{2-0}$; $\frac{x-2}{0}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{2}$ — рівняння TO.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=1,\\ x=2,\\ y+2=2z;\end{cases}\qquad \begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=1,\\ x=2,\\ y=2z-2;\end{cases}$$

$(2-2)^2+(2z-2+2)^2+z^2=1$; $4z^2+z^2=1$; $5z^2=1$; $z^2=\frac{1}{5}$; $z=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Отже,

$$\begin{cases}x=2,\\ y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}-2,\\ z=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$$

Звідси $P\left(2;-2+\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ — найближча точка до $T(2;2;2)$.

8) $S\left(2;-2-\frac{2\sqrt{5}}{5};-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ — найвіддаленіша від $T(2;2;2)$.

alg.net

28. 1) F: $x + y + z = 5$ — площина; $x = 1$ — площина, перпендикулярна до осі Ox. Фігурою перетину двох площин є пряма.

2) F: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ — сфера з центром $(0; 0; 0)$ і $R = \sqrt{5}$; $x = 1$ — площина. Фігурою перетину $\left(1 < \sqrt{5}\right)$ є коло $y^2 + z^2 = 4$ з центром $(1; 0; 0)$ і $R = 2$.

3) F: $xyz = 5$; $x = 1$ — площина. Фігурою перетину є гіпербола $yz = 5$; $y = \dfrac{5}{z}$.

4) F: $y^2 = xz$; $x = 1$ — площина. Фігурою перетину є парабола $z = y^2$.

29. 1) F: $x + y + z = 5$ — площина; $y = 1$ — площина. Фігурою перетину двох площин є пряма.

2) F: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ — сфера; $y = 1$ — площина.

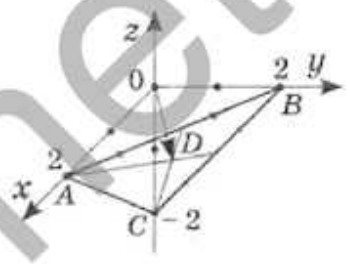
Фігурою перетину $\left(1 < \sqrt{5}\right)$ є коло $x^2 + z^2 = 4$ з центром $(0; 1; 0)$ і радіусом 2.

3) F: $xyz = 5$; $y = 1$. Фігурою перетину є гіпербола $xz = 5$; $z = \dfrac{5}{x}$.

4) F: $y^2 = xz$; $y = 1$. Фігурою перетину є гіпербола $xz = 1$; $z = \dfrac{1}{x}$.

30. $O(0; 0; 0)$ — початок координат.

1) $x + y - z = 2$ — площина, що проходить через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; -2)$.



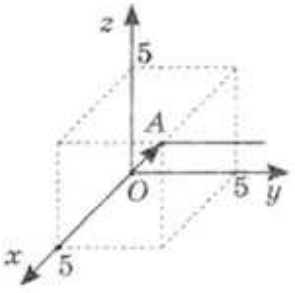
$|AB| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$; $|BC| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$;
$|AC| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, тобто ΔABC — рівносторонній.

$OA = OB = OC = 2$, отже, т. O проектується в центр правильного ΔABC — точку D; $OD \perp (ABC)$, $|OD|$ — шукана відстань, C_1 — середина AB, $C_1(1; 1; 0)$; CC_1 — медіана трикутника; D — точка перетину медіан, $CD : DC_1 = 2 : 1$; $D(x; y; z)$.

$$x = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3};\quad y = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3};\quad z = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$|OD| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$ Отже, $|OD| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) $\begin{cases} x \geq 5 \\ y \geq 5z \\ z \geq 5 \end{cases}$

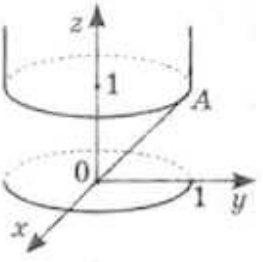


— частина простору, обмежена площиною $x = 5$;
— частина простору;
— частина простору, обмежена площиною $z = 5$.
Фігура, задана цією умовою, — промінь з початком $A(5; 5; 5)$ паралельний осі Oy.

$|OA| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$. Отже, $|OA| = 5\sqrt{3}$.

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$

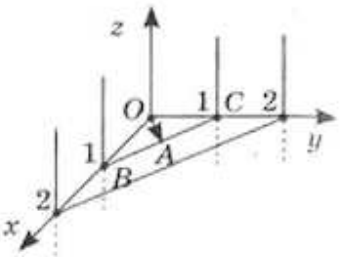
— рівняння кола з центром $(0; 0; z)$ і $R = 1$;
— частина простору, обмежена площиною $z = 1$.
Фігура, задана цією умовою, — порожній необмежений циліндр, тому відстань від початку координат до фігури — відстань від початку координат до будь-якої точки кола: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$; $A(0; 1; 1)$.



$|OA| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Отже, $|OA| = \sqrt{2}$.

aldz.net

4) $1 \le x + y \le 2$. Фігура, що задовольняє цю умову, — частина простору, обмежена площинами $x + y = 1$ і $x + y = 2$ паралельними Oz і перпендикулярними xOy.



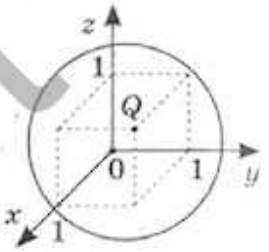
Проведемо $OA \perp BC$, $|OA|$ — шукана відстань.
Оскільки ΔBOC прямокутний рівнобедрений з основою BC ($OB = OC = 1$), то висота OA є медіаною,

$$BC = \sqrt{2}, \quad OA = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Отже, $|OA| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$ — сфера з центром $Q(1; 1; 1)$ і $R = \sqrt{2}$.
Знайдемо точки перетину сфери з прямою QO:



$Q(1; 1; 1)$, $O(0; 0; 0)$: $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{1-0}$;

$x = y = z$ — пряма QO.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2, \\ x = y = z; \end{cases} \quad (x-1)^2 \cdot 3 = 2;$$

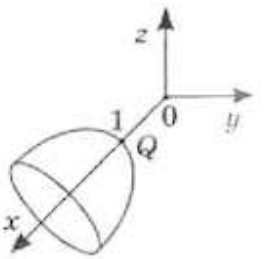
$$(x-1)^2 = \frac{2}{3}; \quad x - 1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad x = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad y = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad z = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отже, точки $A\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ і $B\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ — точки перетину сфери і прямої.
Ближчою до початку відліку є точка B. Знайдемо відстань OB:

$$|OB| = \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \left|1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right| \cdot \sqrt{3} =$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \text{ Отже, } |OB| = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

6) $x = y^2 + z^2 + 1$. Фігура, що задовольняє цю умову, — параболоїд обертання, віссю обертання якого є Ox, а вершина $Q(1; 0; 0)$, тому відстань від початку координат до фігури дорівнює 1. Отже, $|OQ| = 1$.



§ 3. Алгебра векторів

ПОЯСНЕННЯ

Для будь-яких трьох точок A, B і C справедливе правило трьох точок:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
$|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}| \le |\overrightarrow{AC}| \le |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$.
Для додавання векторів користуються:
— правилом трикутника;
— правилом паралелограма;
— правилом паралелепіпеда.
Умова колінеарності векторів: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ $(\vec{a} \ne \vec{0}, \vec{b} \ne \vec{0})$; $\lambda \ne 0$; $\lambda \in R$.

alg.net

Завдання 3

1. 1) $\overrightarrow{AB}$ — даний вектор; 2) $0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$; 3) $1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$;







4) $-1 \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; 5) $\left(1 : |\overrightarrow{AB}|\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $|\vec{a}| = 1$.

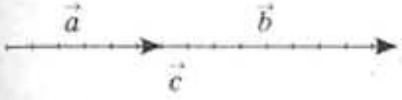




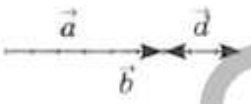
2. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — дані вектори, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 9$.



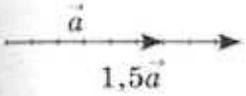
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$; $|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| = 15$;



2) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$; $|\vec{d}| = \left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| = 3$;



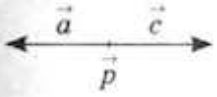
3) $\left(|b| : |a|\right) \cdot \vec{a} = \vec{b}$; $9 : 6 \cdot \vec{a} = 1{,}5\vec{a} = \vec{b}$.



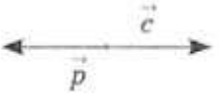
3. $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{p}$; $|c| = 2$ см; $|p| = 4$ см.



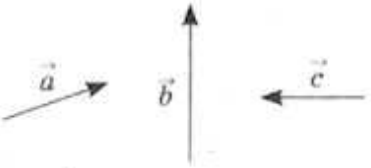
1) $\vec{c} + \vec{p} = \vec{a}$; $|\vec{a}| = 2$ см; 2) $\vec{c} - \vec{p} = \vec{b}$; $|\vec{b}| = 6$ см; 3) $\left(-|p| : |c|\right) \cdot \vec{c} = -2\vec{c} = \vec{p}$.



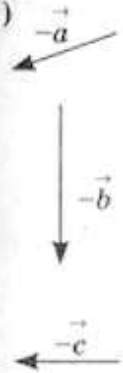




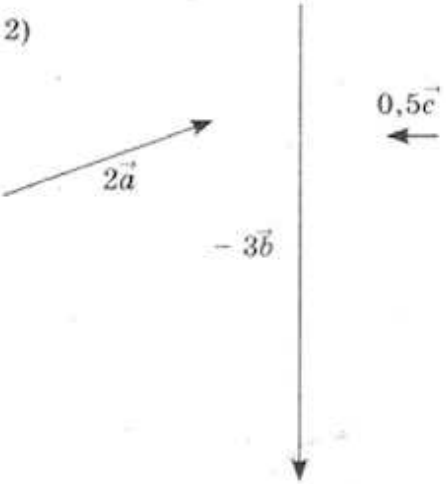
4. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — дані ненульові вектори.



1)



2)



3) $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$;
$|0{,}5\vec{c}| = 0{,}5|-\vec{c}|$;
$|2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$.

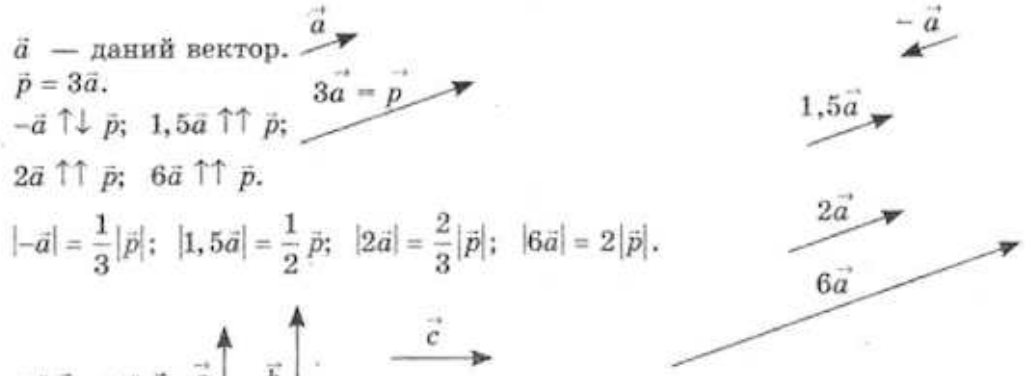
alldz.net

5. $\vec{a}$ — даний вектор. $\vec{p} = 3\vec{a}$.

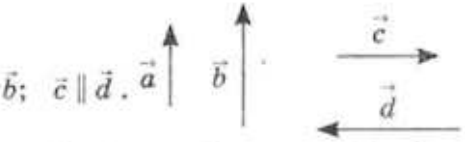
$-\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{p}$; $1{,}5\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$;

$2\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$; $6\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$.

$|-\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$; $|1{,}5\vec{a}| = \frac{1}{2}\vec{p}$; $|2\vec{a}| = \frac{2}{3}|\vec{p}|$; $|6\vec{a}| = 2|\vec{p}|$.

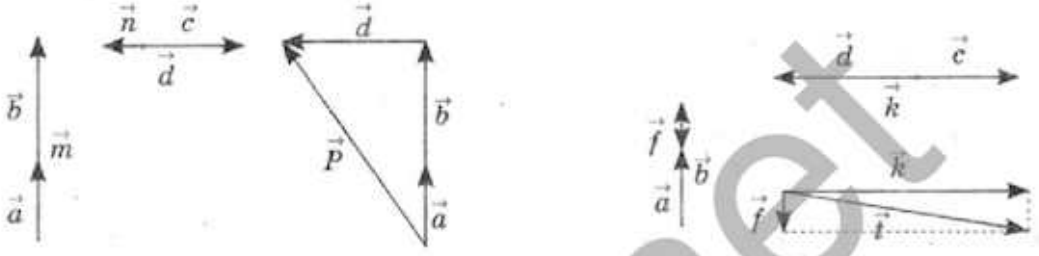


6. $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{c} \parallel \vec{d}$.

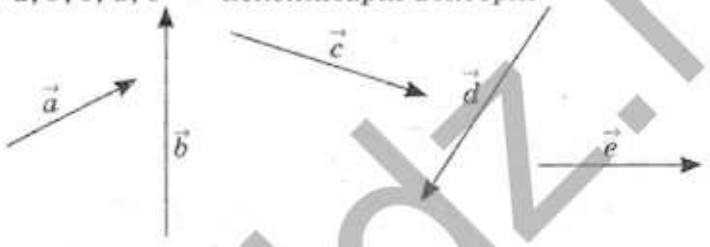


1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{m}$; $\vec{c} + \vec{d} = \vec{n}$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{p}$;

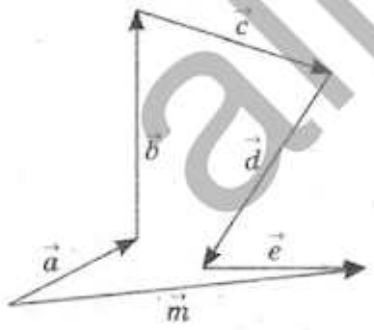
2) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{f}$; $\vec{c} - \vec{d} = \vec{k}$; $\vec{f} + \vec{k} = \vec{t}$.



7. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ — неколінеарні вектори.

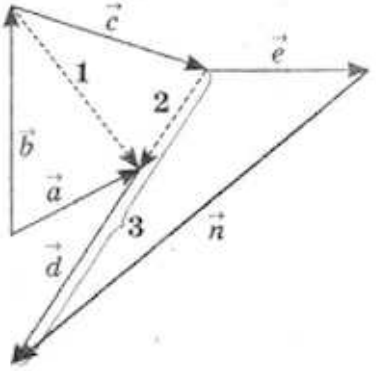


1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{m}$;

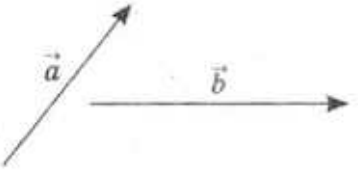


2) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} - \vec{e} = \vec{n}$.

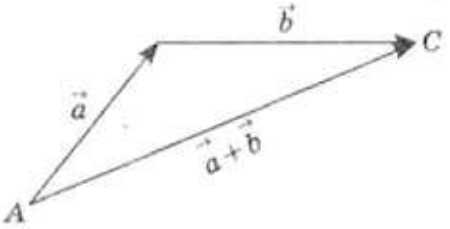
1. $\vec{a} - \vec{b}$
2. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
3. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$



8. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні.



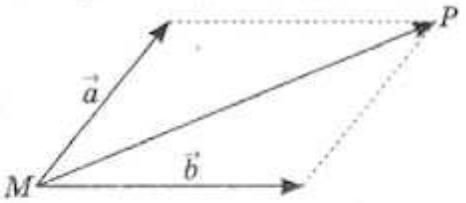
1) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$; за правилом трикутника вектори розташовані послідовно;



alldz.net

2) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MP}$; за правилом паралелограма вектори виходять з однієї точки;

3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP}$.



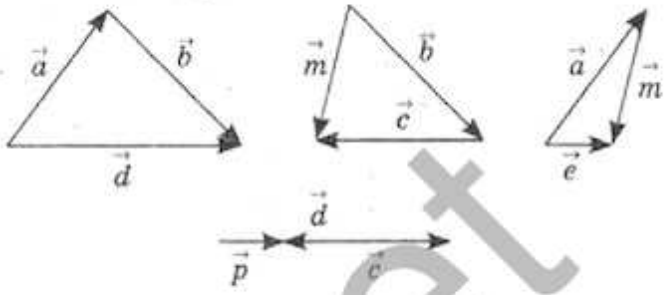
9. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — неколінеарні.



1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$; $\vec{b} + \vec{c} = \vec{m}$;

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{m} = \vec{e}$;

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{d} + \vec{c} = \vec{p}$;



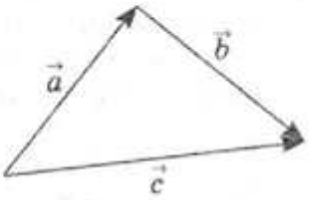
2) $\vec{e} = \vec{p}$, отже,

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

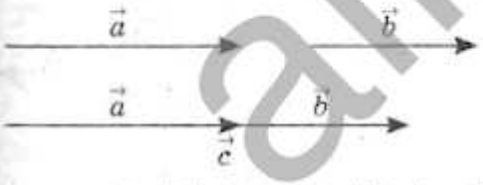
10. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — довільні вектори.



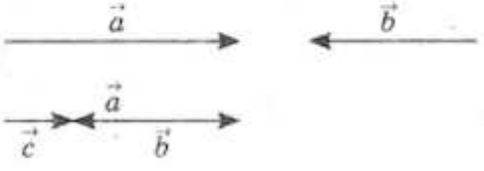
1) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні, тоді за правилом трикутника: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$; $|\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{c}|$ (за нерівністю трикутників).



2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$; $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$;



3) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$; $|\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{c}|$.

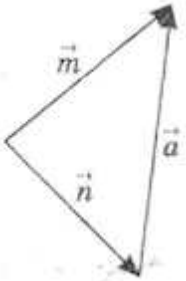


Отже, $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{c}|$; $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$.

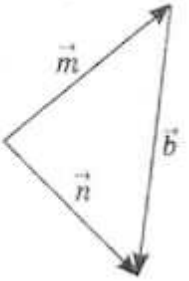
11. $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — ненульові вектори.



1) $\vec{m} - \vec{n} = \vec{a}$;



2) $\vec{n} - \vec{m} = \vec{b}$; $\vec{a} = -\vec{b}$.

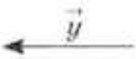


Отже, отримані вектори — протилежні.

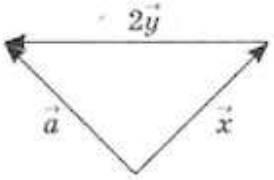
alldz.net

12. $\vec{x}$ і $\vec{y}$ — ненульові вектори.

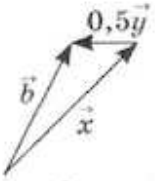




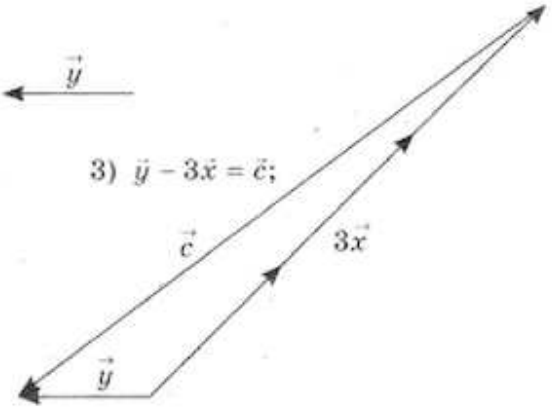
1) $\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{a}$;



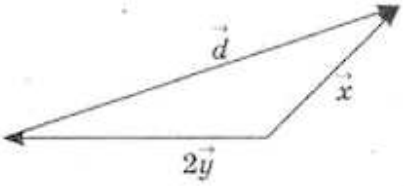
2) $0{,}5\vec{y} + \vec{x} = \vec{b}$;



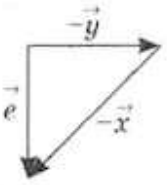
3) $\vec{y} - 3\vec{x} = \vec{c}$;



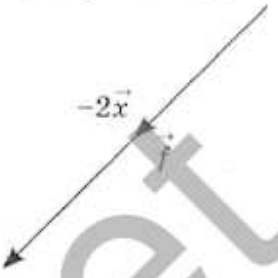
4) $-2\vec{y} + \vec{x} = \vec{d}$;



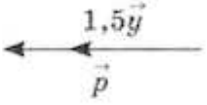
5) $-\vec{y} - \vec{x} = \vec{e}$;



6) $0 \cdot \vec{y} - 2\vec{x} = \vec{f}$;



7) $1{,}5\vec{y} - 0 \cdot \vec{x} = \vec{p}$.

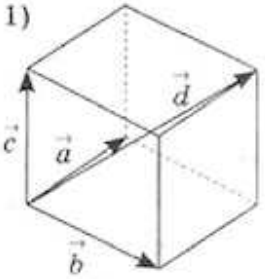


13. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некомпланарні вектори.

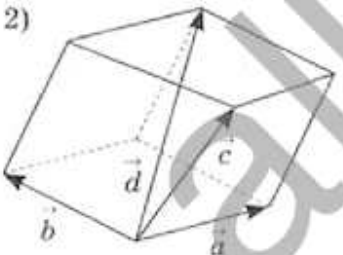
За правилом паралелепіпеда розташовуємо вектори так, щоб вони виходили з однієї точки, вектори служать ребрами паралелепіпеда, а діагональ є сумою даних векторів.

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

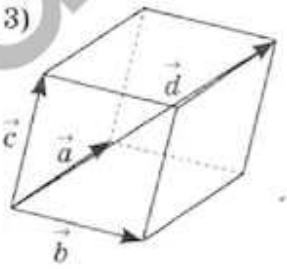
1)



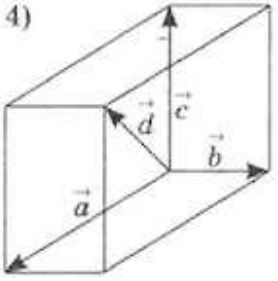
2)



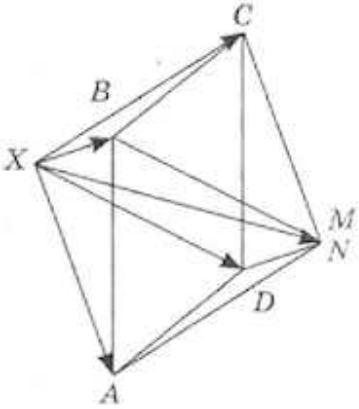
3)



4)



14. Оскільки вектори виходять з однієї точки, то відповідні суми знайдемо, використовуючи правило паралелограма. Добудуємо до паралелограмів $AXCM$ і $DXBN$, тоді $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XM}$; $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD} = \overrightarrow{XN}$, причому $\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XN}$ і від зміни положення точки X результат не зміниться.



Доведення:

Припустимо, що за умови зміни положення точки X рівність не виконується, тобто

$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} \neq \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$; $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AD}$ (за правилом трикутника);

$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AD}$.

alldz.net

Звідси $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AD}$, але це суперечить умові, бо $ABCD$ — паралелограм, отже, $BC = AD$, $BC \parallel AD$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Висновок: $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$ незалежно від вектору точки X.

15. 1) $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}|$ у випадку: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (№ 2);

2) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ у випадку: $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$;

3) $|\vec{a} - \vec{b}| > |\vec{a} + \vec{b}|$ у випадку: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ (№ 3).

16. $\vec{b} = x\vec{a}$; $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$.

1) Якщо $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, то $x > 0$, $|\vec{b}| = |x| \cdot |\vec{a}| = 3|\vec{a}|$, звідси $|x| = 3$, $x = 3$.

2) Якщо $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то $x < 0$, $|\vec{b}| = |x| \cdot |\vec{a}| = 3|\vec{a}|$, звідси $|x| = 3$, $x = -3$.

17. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні.

1) $x\vec{a} + y\vec{b} = (y + 1)\vec{a} + (2 - x)\vec{b}$.

Звідси $\begin{cases} x = y + 1, \\ y = 2 - x; \end{cases} \begin{cases} x = y + 1, \\ y = 2 - (y + 1); \end{cases} \begin{cases} x = y + 1, \\ y = 2 - y - 1; \end{cases} \begin{cases} x = y + 1, \\ 2y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = y + 1, \\ y = 0,5; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1,5, \\ y = 0,5. \end{cases}$

2) $(2 - x)\vec{a} + \vec{b} = y\vec{a} + (x - 3)\vec{b}$.

Звідси $\begin{cases} 2 - x = y, \\ 1 = x - 3; \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ x = 4. \end{cases}$

18. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні.

1) $(x - 1)\vec{a} + 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + x\vec{b}$ — колінеарні.

Звідси $\frac{x-1}{3} = \frac{2}{x}$; $\begin{cases} x^2 - x = 6, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -2. \\ x \neq 0. \end{cases}$ Отже, $x = 3$ або $x = -2$.

2) $3\vec{a} + x\vec{b}$ і $(1 - x)\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ — співнапрямлені.

Звідси $\begin{cases} \frac{3}{1-x} = \frac{x}{-\frac{2}{3}}, \\ x < 0; \end{cases} \begin{cases} -2 = x - x^2, \\ x < 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x < 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x < 0. \end{cases}$ Отже, $x = -1$.

19. $2\vec{a} + 5\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} - 8\vec{d} = 0$.

1) $2\vec{a} = 8\vec{d} - 0 \cdot \vec{c} - 5\vec{b}$; $\vec{a} = 4\vec{d} - 0 \cdot \vec{c} - 2,5\vec{b}$;

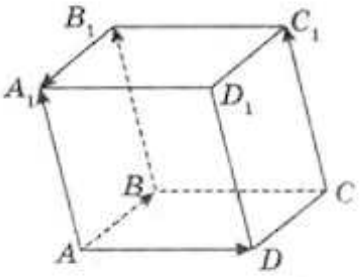
2) $5\vec{b} = 8\vec{d} - 0 \cdot \vec{c} - 2\vec{a}$; $\vec{b} = 1,6\vec{d} - 0 \cdot \vec{c} - 0,4\vec{a}$;

3) $2\vec{a} + 5\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = 8\vec{d}$; $\vec{d} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$.

Компланарні вектори — вектори, що належать паралельним площинам (одній площині).
Колінеарні вектори належать паралельним прямим (одній прямій).

alez.net

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед.



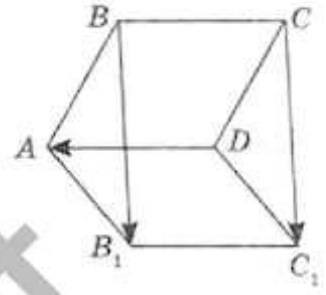
1) За властивістю паралелепіпеда $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, отже, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ є компланарними.

2) AA_1 і AB належать площині (ABB_1), AD перетинає цю площину, отже, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ не є компланарними.

3) $AD \subset (ADD_1)$, $CC_1 \subset (CBB_1)$, $(ADD_1) \parallel (CBB_1)$, A_1B_1 перетинає ці площини, отже, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ не є компланарними.

4) $DD_1 \parallel BB_1$, DD_1 і BB_1 належать площині (DD_1B_1), AC перетинає цю площину, отже, $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AC}$ не є компланарними.

21. Оскільки $ABCD$ і AB_1C_1D — паралелограми, що $BC \parallel AD \parallel B_1C_1$, тобто $BC \parallel B_1C_1$, отже, ці прямі утворюють площину, якій належать прямі BB_1 і CC_1. Оскільки $BC \parallel AD \parallel B_1C_1$, то $AD \parallel (BB_1C)$.



Отже, вектори $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ належать одній площині, а $\overrightarrow{DA}$ паралельний до неї, тому вектори є компланарними.

22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед.

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$;

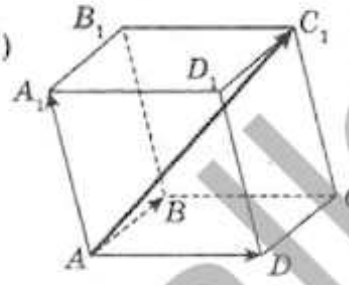
2) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB_1}$ $\left(\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}\right)$;

3) $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{DB_1}$
$\left(\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}\right)$;

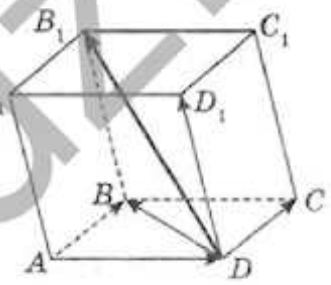
4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1C}$ $\left(\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AD}\right)$;

5) $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD_1}$ $\left(\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{BA}\right)$.

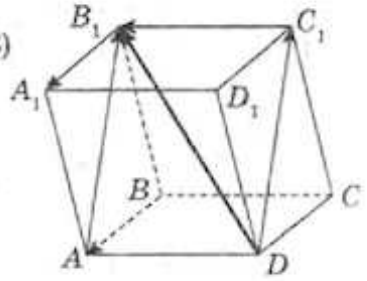
1)



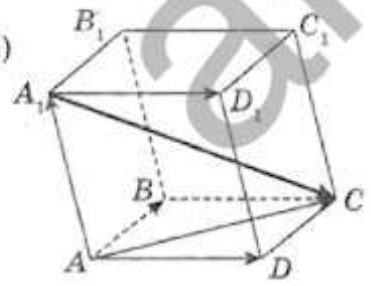
2)



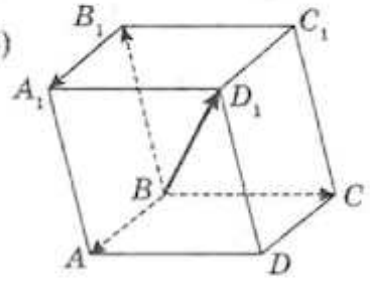
3)



4)

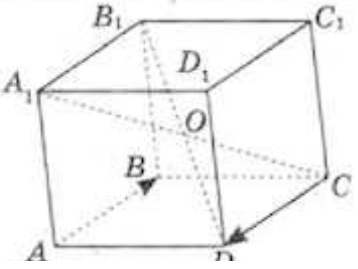


5)



Якщо відрізки рівні і паралельні, то відповідні їм вектори рівні або протилежні.

23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, O — точка перетину діагоналей.



1) $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$;

2) $\overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B}$; $\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1D}$

(за правилом паралелепіпеда);

ald.net

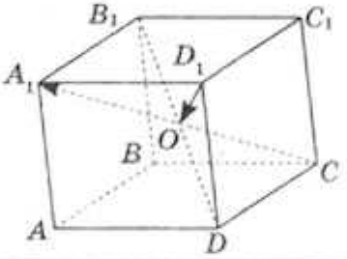
(за правилом паралелепіпеда).

$\overrightarrow{DA_1} = -\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{D_1D} = -\overrightarrow{AA_1}$.

Отже, $\overrightarrow{D_1B} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{D_1O} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.



Точка перетину діагоналей паралелограма поділяє їх навпіл.

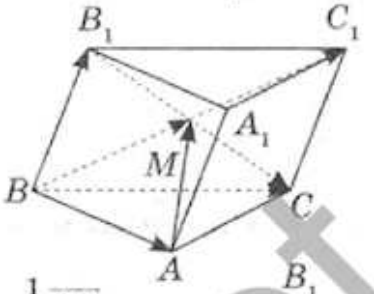
24. $ABCA_1B_1C_1$ — трикутна призма, M — точка перетину B_1C і BC_1.

1) $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{BM}$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$;

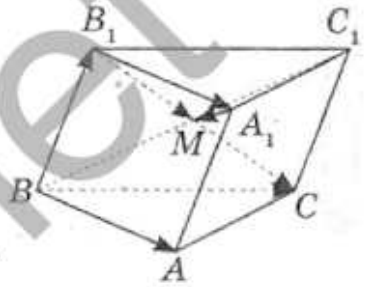


2) $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{B_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$;

$\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{B_1M}$; $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$;

$\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{B_1A_1}$; $\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}$.

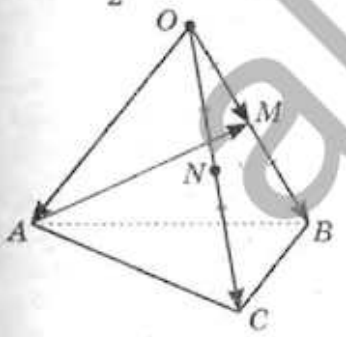


25. $OABC$ — тетраедр, M — середина OB, N — середина OC.

1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$;

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, тоді

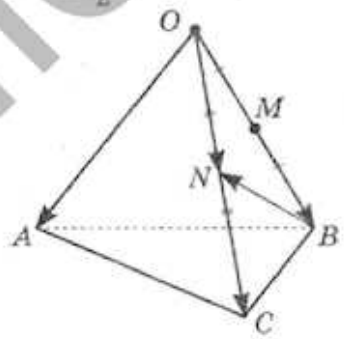
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$;



2) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB}$;

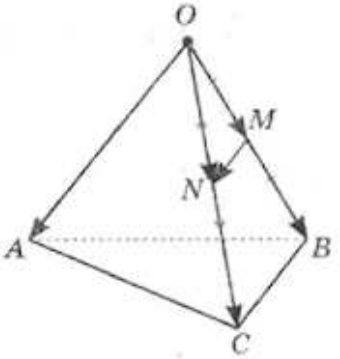
$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, тоді

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$;



3) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.



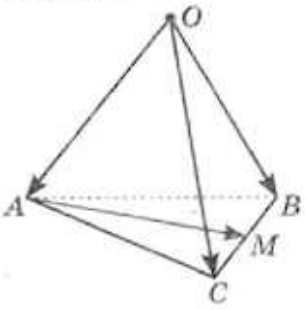
26. $OABC$ — тетраедр, AM — медіана ΔABC, отже, M — середина BC.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \text{ (в } \Delta OBM)\\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \text{ (в } \Delta OCM)\end{array}\right| +$

$+ 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = 0$, тому

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$;

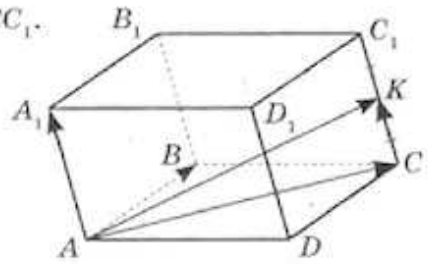
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.



alldz.net



27. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, K — середина CC_1.

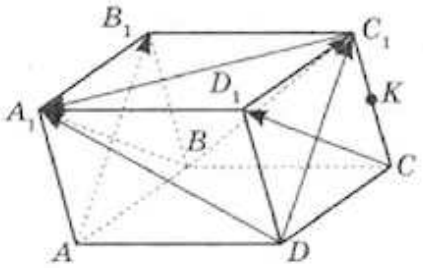


1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AK}$;

$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1}$,

тому $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

2) Оскільки протилежні грані паралелепіпеда — рівні і паралельні паралелограми, то їх відповідні діагоналі також рівні і паралельні, тому $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{CD_1}$; $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}$.



У ΔA_1BC_1: $\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{BC_1}$.

У ΔA_1C_1D: $\overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{DA_1}$.

Отже: $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CD_1} - \overrightarrow{BC_1}$.

§ 6. Три точки на прямій. Векторний метод

ПОЯСНЕННЯ

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні ненульові, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$.
Якщо точки A, B, C належать прямій, а точка O їй не належить, то $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$.

Якщо $C \in AB$ і $AC : CB = m : n$, то $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{n+m}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB}$.

Завдання 4

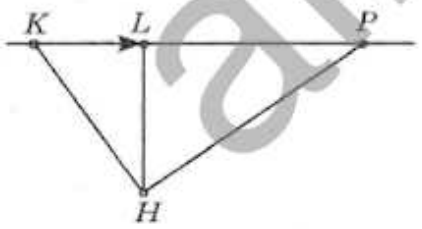
1. K, L, P лежать на одній прямій, H не належить цій прямій.

1) $\overrightarrow{LP} = 2\overrightarrow{KL}$, отже, $KL : LP = 1 : 2$.

Тоді $\overrightarrow{HL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HP}\Big| \cdot 3$;

$3\overrightarrow{HL} = 2\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{HP}$, звідси

$\overrightarrow{HP} = 3\overrightarrow{HL} - 2\overrightarrow{HK}$.

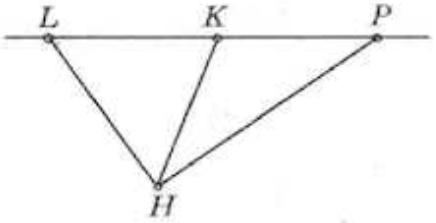


2) $\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PL}$, отже, $LK : KP = 1 : 1$.

Тоді $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HL} + \overrightarrow{HP})\Big| \cdot 2$;

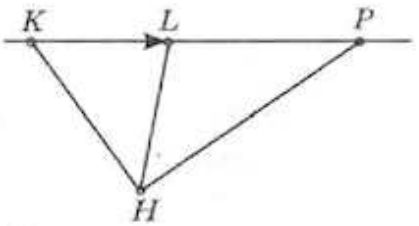
$2\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HL} + \overrightarrow{HP}$, звідси

$\overrightarrow{HP} = 2\overrightarrow{HK} - \overrightarrow{HL}$.



3) $\overrightarrow{KP} = \lambda\overrightarrow{KL}$.

За формулою $\overrightarrow{HP} = \lambda\overrightarrow{HL} + (1 - \lambda)\overrightarrow{HK}$.



2. Розглянемо вираз $k\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, де k, n, m — деякі числа, $k \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq 0$.

$k\overrightarrow{OA} = -n\overrightarrow{OB} - m\overrightarrow{OC}\Big| : k \neq 0$; $\overrightarrow{OA} = -\frac{n\overrightarrow{OB}}{k} - \frac{m\overrightarrow{OC}}{k}$; $\overrightarrow{OA} = \frac{n\overrightarrow{OB}}{-k} + \frac{m\overrightarrow{OC}}{-k}$.

aldz.net

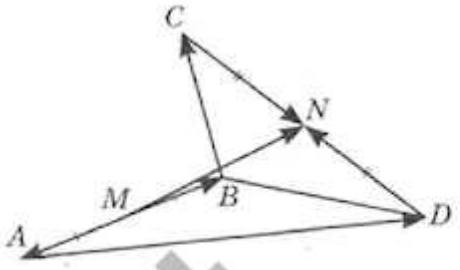
Оскільки серед чисел завжди можна знайти таку трійку, що $-k = n + m$, то маємо:

$\overrightarrow{OA} = \frac{n\overrightarrow{OB}}{n+m} + \frac{m\overrightarrow{OC}}{n+m}$, тобто $BA : CA = m : n$.

Отже, якщо $k\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $-k = n + m$, то точки A, B, C лежать на одній прямій.

3. $ABCD$ — просторовий чотирикутник, M і N — середини сторін AB і CD відповідно.

$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MN}\end{matrix}\right|$ + Маємо:

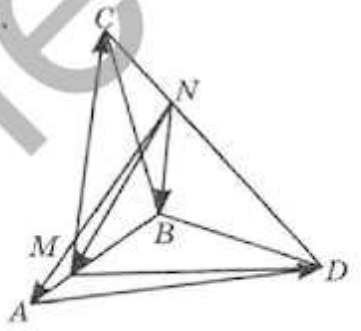


$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{MN}$.

Оскільки M — середина AB, то $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$,
отже, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Аналогічно $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Тоді $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$, звідси $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

4. $ABCD$ — просторовий чотирикутник, $M \in AB$, $N \in CD$.
$AM : MB = CN : ND = n : m$ (за умовою).
У ΔCMD за формулою:



$\overrightarrow{MN} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{MD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{MC} =$

$= \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) + \frac{n}{m+n}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}\right) =$

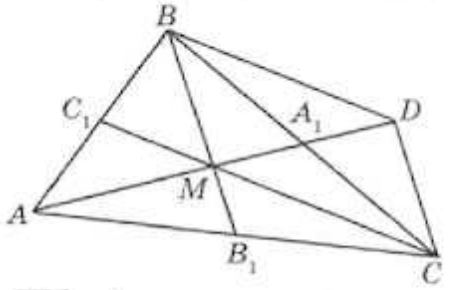
$= \frac{m}{m+n}\overrightarrow{MA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{MB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BC} =$

$= \frac{n}{m+n}\overrightarrow{MB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{MA} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BC} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MM} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BC} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD} =$

$= \vec{0} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BC} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BC} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BC}$.

Центроїд трикутника — точка перетину його медіан.

5. M — центроїд ΔABC — точка перетину його медіан AA_1, BB_1, CC_1, отже, A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, AC і AB відповідно.
За властивістю медіан:
$AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$.
На продовженні AA_1 відкладемо $A_1D = MA_1$.
Оскільки A_1 — середина BC, то $BA_1 = A_1C$,
тоді за ознакою $MBDC$ — паралелограм,
$MD = 2MA_1 = MA$, $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MA}$.
За властивістю паралелограма



$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$.

6. Відомо, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, тобто $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$, де A, B, C — вершини деякого трикутника, а точка M — довільна.

Добудуємо ΔMBC до паралелограма $MBCD$, тоді $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$; точку перетину MD і BC позначимо A_1, за властивістю паралелограма: $BA_1 = A_1C$, $MA_1 = A_1D$.

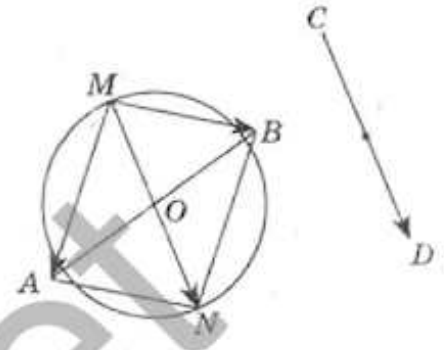
aldz.net

Оскільки $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$, то $-\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD}$, тобто вектори лежать на одній прямій, отже, AA_1 — медіана ΔABC.

Аналогічно BB_1 і CC_1 — медіани ΔABC, $AM = MD = 2MA_1$, то M — точка перетину медіан. Отже, M — центроїд трикутника (див. рис. до задачі № 5).

7. A, B, C, D — дані точки. За умовою $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CD}$, де M — шукана точка.

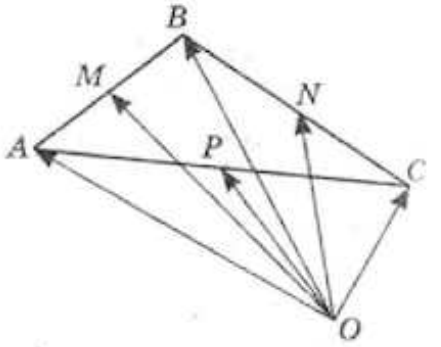
Аналіз: Оскільки вектори виходять з однієї точки, то для знаходження суми векторів побудуємо паралелограм $AMBN$, у якому $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$ (O — точка перетину діагоналей). За умовою $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}$, тобто $MN = CD$; $MN \parallel CD$; $MO = ON = \frac{1}{2}CD$.



Побудова:
1) З'єднуємо точки A і B, C і D, отримуємо відрізки AB і CD.
2) Ділимо кожний з відрізків навпіл (O — середина AB).
3) Будуємо пряму, що проходить через точку O паралельно CD.
4) Будуємо коло з центром O і радіусом $\frac{1}{2}CD$.
5) Враховуючи напрямок вектора CD, відмічаємо точки M і N.

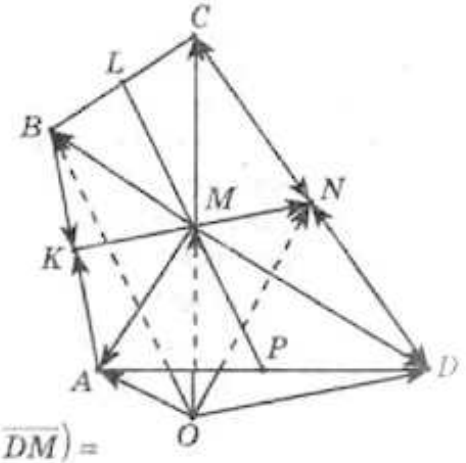
Доведення:
За правилом паралелограма $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}$ ($MN \parallel CD$, $MN = CD$).
Отже, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CD}$.

8. ΔABC — довільний.
M — середина AB, N — середина BC,
P — середина AC.
O — довільна точка простору, тоді:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON}$;
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OP}$.



Додамо відповідні частини рівностей:
$2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP} \mid : 2$;
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

9. $ABCD$ — довільний чотирикутник, $O \notin (ABC)$.
M — точка перетину даних відрізків KN і LP (K, L, N, P — середини AB, BC, CD, AD відповідно).



Тоді $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM}\end{array}\right| +$;

$4\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}) =$
$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) -$

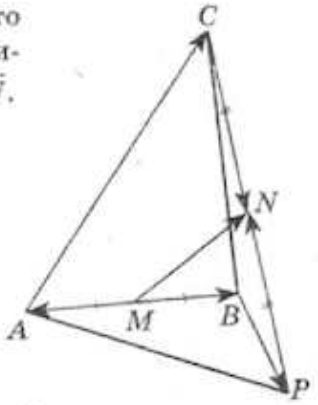
alez.net

$$-\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\right)=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)-$$

$-\left(2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MN}\right)+\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)\right)=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)-\left(2\cdot\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}\right)=$

$=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right);\ \ \overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$

10. Оскільки відрізки AB і CP не лежать в одній площині, то точки A, B, C і P — вершини просторового чотирикутника, M і N — середини AB і CP; $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{PN}=-\overrightarrow{CN}$.



З'єднаємо точки A і C.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PN}\end{aligned}\right|+$$

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PN};$

$2\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CN};$

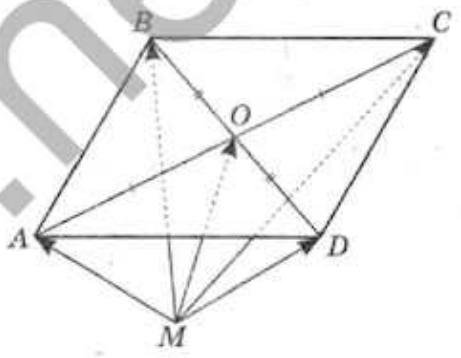
$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}.$

За властивістю векторів (див. §5) $\left|2\overrightarrow{MN}\right|\le\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{BP}\right|$;

тобто $2MN\le AC+BP\ |:2;\ MN\le\frac{1}{2}(AC+BP)$. Отже, $MN\le 0{,}5(AC+BP)$.

11. $ABCD$ — паралелограм, O — точка перетину діагоналей; $M\notin(ABC)$.

Маємо: $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right);$



$2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC};$

$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right);$

$2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.$

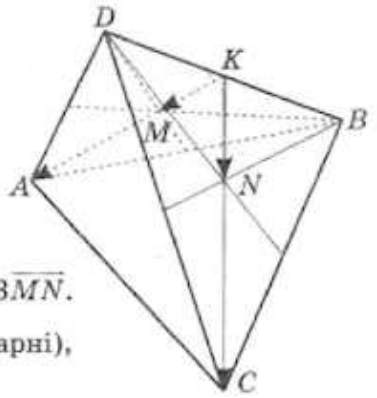
За властивістю векторів (див. §5):

$\left|2\overrightarrow{MO}\right|<\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MC}\right|;\ \ \left|2\overrightarrow{MO}\right|<\left|\overrightarrow{MB}\right|+\left|\overrightarrow{MD}\right|.$

Отже, $\left.\begin{aligned}2MO&<MA+MC\\ 2MO&<MB+MD\end{aligned}\right|+;\ 4MO<MA+MB+MC+MD\ |:4;$

$MO<\frac{1}{4}(MA+MB+MC+MD).$

12. $ABCD$ — тетраедр, M і N — центроїди граней ABD і BCD відповідно; AK і CK — медіани ΔABD і ΔBCD відповідно; K — середина BD.



За властивістю центроїда:

$AM:MK=CN:NK=2:1;$

$AK:MK=CK:NK=3:1.$

Тобто $\overrightarrow{KA}=3\overrightarrow{KM};\ \ \overrightarrow{KC}=3\overrightarrow{KN}.$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KA};\ \ \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{KN}-3\overrightarrow{KM}=3\left(\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KM}\right)=3\overrightarrow{MN}.$

Оскільки $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{MN}$, то $\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{MN}$ (вектори колінеарні),

звідси $AC\parallel MN;\ AC=3MN;\ \frac{MN}{AC}=\frac{1}{3}.$

Відповідь: $AC\parallel MN;\ \frac{MN}{AC}=\frac{1}{3}.$

alldz.net

13. Нехай M і M_1 — центроїди даних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, за умовою M і M_1 співпадають. За властивістю центроїда:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ і $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right)$.

Звідси: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$;

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} = 0$;

$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C} = 0$;

$\overrightarrow{A_1A} = -\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.

Ця рівність означає, що вектори $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{B_1B}$ і $\overrightarrow{C_1C}$ є компланарними, а отже, належать паралельним площинам, це означає, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 паралельні одній площині.

14. A, B, C — середини відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 відповідно.
Нехай M, M_1, M_2 — центроїди ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ відповідно, а O — довільна точка простору. Тоді за властивістю центроїда:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$; $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right)$;

$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}\right)$.

Оскільки A, B, C — середини відповідних відрізків, то

$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right)$; $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}\right)$; $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}\right)$.

Тоді $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}\right)\right)$;

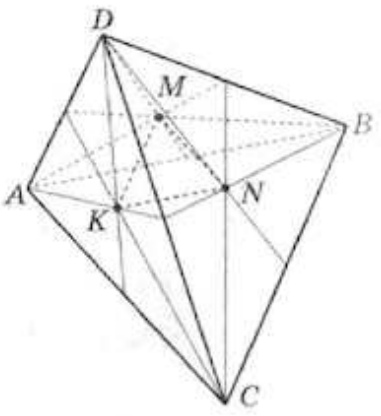
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}\right)$;

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}\right)\right)$;

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM_2}$.

Отже, M — середина відрізка M_1M_2, значить, точки M, M_1, M_2 належать одній прямій.

15. $ABCD$ — даний тетраедр; M, N, K — центроїди бічних граней ADB, BDC, CDA, тоді за висновком задачі № 12:



$MN \parallel AC$, $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{3}$;

$KN \parallel AB$, $\frac{KN}{AB} = \frac{1}{3}$;

$MK \parallel BC$, $\frac{MK}{BC} = \frac{1}{3}$.

Отже: $(MNK) \parallel (ABC)$; $\frac{MN}{AC} = \frac{KN}{AB} = \frac{MK}{BC} = \frac{1}{3}$,

звідси $\Delta MNK \sim \Delta CAB$.

alidz.net

§7. Координати вектора. Дії над векторами, що задані координатами

ПОЯСНЕННЯ

Якщо $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ — точки простору, що $\vec{a} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Якщо $\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Довжина вектора a (абсолютна величина) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Якщо $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$, то $\vec{d}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;

$\lambda\vec{a} = \vec{p}$, то $\vec{p}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, де $\alpha = \angle(\vec{a}; \vec{b})$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Завдання 5

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, де $\vec{e}_1(1; 0; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1; 0)$, $\vec{e}_3(0; 0; 1)$.

1. 1) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{a}(2; 5; -1)$;

2) $\vec{b} = -12\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$, $\vec{b}(-12; 0{,}5; -6)$;

3) $\overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{1 - 0; -1 - 3; 0 - 4}) = (\overrightarrow{1; -4; -4})$;

4) $\overrightarrow{PD} = (\overrightarrow{-1 - (-4); 5 - 1; 2 - 10}) = (\overrightarrow{3; 4; -8})$.

2. 1) $\vec{a} + \vec{b} = (\overrightarrow{1 + 2; -2 + 0; 1 + 1}) = (\overrightarrow{3; -2; 2})$;

2) $\vec{c} - \vec{b} = (\overrightarrow{4 - 2; -1 - 0; 1 - 1}) = (\overrightarrow{2; -1; 0})$;

3) $3\vec{a} = (\overrightarrow{3 \cdot 1; 3 \cdot (-2); 3 \cdot 1}) = (\overrightarrow{3; -6; 3})$;

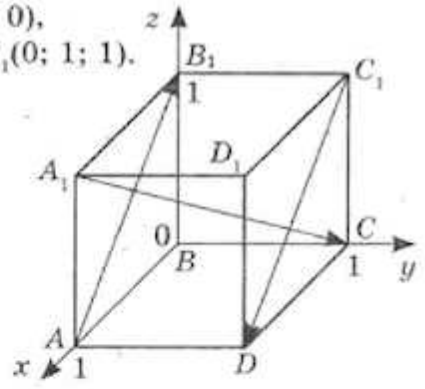
4) $-0{,}3\vec{b} = (\overrightarrow{-0{,}3 \cdot 2; -0{,}3 \cdot 0; -0{,}3 \cdot 1}) = (\overrightarrow{-0{,}6; 0; -0{,}3})$;

5) $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(\overrightarrow{1; -2; 1}) - 3(\overrightarrow{2; 0; 1}) = (\overrightarrow{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2; -2 \cdot 2 - 3 \cdot 0; 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1}) =$

$= (\overrightarrow{-1; -4; -1})$;

6) $\vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b}) = (\overrightarrow{4; -1; 1}) - (\overrightarrow{3; -2; 2}) = (\overrightarrow{4 - 3; -1 - (-2); 1 - 2}) = (\overrightarrow{1; 1; -1})$.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб; $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(0; 0; 1)$, тоді $A_1(1; 0; 1)$, $D(1; 1; 0)$, $D_1(1; 1; 1)$, $C_1(0; 1; 1)$.



1) $\overrightarrow{AB_1}(0 - 1; 0 - 0; 1 - 0)$; $\overrightarrow{AB_1}(-1; 0; 1)$;

$\overrightarrow{AB_1} = -1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$;

2) $\overrightarrow{C_1D} = -\overrightarrow{DC_1}$; $\overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{AB_1}$ (за властивістю паралелепіпеда), $\overrightarrow{C_1D}(1; 0; -1)$; $\overrightarrow{C_1D} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$;

3) $\overrightarrow{A_1C}(0 - 1; 1 - 0; 0 - 1)$; $\overrightarrow{A_1C}(-1; 1; -1)$;

$\overrightarrow{A_1C} = -1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 - 1 \cdot \vec{e}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$;

4) $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB_1} = (\overrightarrow{0 - 1; 1 - 0; 0 - 0}) + 2(\overrightarrow{-1; 0; 1}) = (\overrightarrow{-1; 1; 0}) + (\overrightarrow{-2; 0; 2}) =$

$= (\overrightarrow{-1 + (-2); 1 + 0; 0 + 2}) = (\overrightarrow{-3; 1; 2}) = -3\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$;

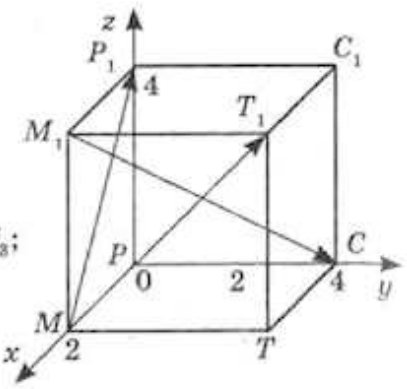
5) $\overrightarrow{C_1D} - 0{,}5\overrightarrow{A_1C} = (\overrightarrow{1; 0; -1}) - 0{,}5(\overrightarrow{-1; 1; -1}) =$

$= (\overrightarrow{1 - 0{,}5 \cdot (-1); 0 - 0{,}5 \cdot 1; -1 - 0{,}5 \cdot (-1)}) = (\overrightarrow{1 + 0{,}5; -0{,}5; -1 + 0{,}5}) =$

$= (\overrightarrow{1{,}5; -0{,}5; -0{,}5}) = 1{,}5\vec{e}_1 - 0{,}5\vec{e}_2 - 0{,}5\vec{e}_3$.

alaz.net

4. $MPCTM_1P_1C_1T_1$ — прямокутний паралелепіпед.
$M(2; 0; 0)$, $P(0; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $P_1(0; 0; 4)$,
$T(2; 4; 0)$, $M_1(2; 0; 4)$, $C_1(0; 4; 4)$, $T_1(2; 4; 4)$.



1) $\overrightarrow{MP_1}(0-2; 0-0; 4-0) = \overrightarrow{MP_1}(-2; 0; 4) =$

$= -2\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 4\cdot\vec{e}_3 = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$;

2) $\overrightarrow{PT_1}(2-0; 4-0; 4-0) = \overrightarrow{PT_1}(2; 4; 4) = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$;

3) $\overrightarrow{M_1C}(0-2; 4-0; 0-4) = \overrightarrow{M_1C}(-2; 4; -4) =$

$= -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$;

4) $\overrightarrow{T_1M} + 2\overrightarrow{PM_1} - \overrightarrow{MP_1} = (\overrightarrow{2-2; 0-4; 0-4}) +$

$+ 2(\overrightarrow{2-0; 0-0; 4-0}) - (\overrightarrow{-2; 0; 4}) = (\overrightarrow{0; -4; -4}) + (\overrightarrow{2\cdot 2; 2\cdot 0; 2\cdot 4}) - (\overrightarrow{-2; 0; 4}) =$

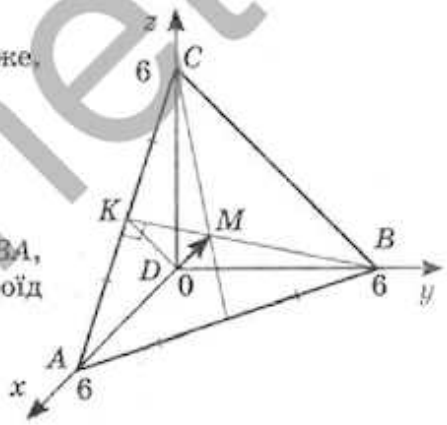
$= (\overrightarrow{(0+4-(-2)); (-4+0-0); (-4+8-4)}) = (\overrightarrow{6; -4; 0}) = 6\vec{e}_1 + -4\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 = 6\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$;

5) $3\overrightarrow{M_1C} - \overrightarrow{PT_1} - 2\overrightarrow{C_1M} = 3(\overrightarrow{-2; 4; -4}) - (\overrightarrow{2; 4; 4}) - 2(\overrightarrow{2-0; 0-4; 0-4}) =$

$= (\overrightarrow{3\cdot(-2); 3\cdot 4; 3\cdot(-4)}) - (\overrightarrow{2; 4; 4}) - (\overrightarrow{2\cdot 2; 2\cdot(-4); 2\cdot(-4)}) =$

$= (\overrightarrow{(-6-2-4); (12-4-(-8)); (-12-4-(-8))}) = (\overrightarrow{-12; 16; -8}) = -12\vec{e}_1 + 16\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3$.

5. $ABCD$ — піраміда.



1) $AD = DC$, ΔADC прямокутний рівнобедрений, отже, висота DK є медіаною, тому K — середина AC;

$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. $\overrightarrow{CA}(6-0; 0-0; 0-6)$; $\overrightarrow{CA}(6; 0; -6)$;

$\overrightarrow{CK}(3; 0; -3)$.

2) DM — висота піраміди, оскільки $AC = CB = BA$, $OA = OC = OB$, то піраміда правильна, M — центроїд ΔABC (точка перетину медіан),

$BM = \frac{2}{3}BK$, K — середина AC.

$K\left(\frac{6+0}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{0+6}{2}\right)$; $K(3; 0; 3)$; $KM : MB = 1 : 2$;

$M\left(\frac{2\cdot 3+0\cdot 1}{3}; \frac{2\cdot 0+1\cdot 6}{3}; \frac{2\cdot 3+0\cdot 1}{3}\right)$; $M(2; 2; 2)$; $\overrightarrow{DM}(2-0; 2-0; 2-0)$;

$\overrightarrow{DM}(2; 2; 2)$; $\overrightarrow{MD}(-2; -2; -2)$.

3) $H(12; 12; 12)$, отже, $\overrightarrow{DH}(12-0; 12-0; 12-0) = \overrightarrow{DH}(12; 12; 12)$.

Оскільки $\frac{12}{2} = \frac{12}{2} = \frac{12}{2} = 6$, то $\overrightarrow{DH} = 6\overrightarrow{DM}$, тобто вектори колінеарні. Оскільки DM — висота піраміди, $DM \perp (ABC)$, тоді $DH \perp (ABC)$.

6. 1) $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = 1$;

2) $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(0+1)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$;

3) $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (2-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{17}$.

7. $\vec{a}(1; -2; 1)$, $\vec{b}(2; 0; 1)$, $\vec{c}(4; -1; 0)$.

1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{(1+2; -2+0; 1+1)}| = |\overrightarrow{(3; -2; 2)}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$;

2) $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\overrightarrow{(1; -2; 1)}| + |\overrightarrow{(2; 0; 1)}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} + \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$;

3) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\overrightarrow{(1-2; -2-0; 1-1)}| = |\overrightarrow{(-1; -2; 0)}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$;

alds.net

4) $5\vec{c} = 5 \cdot |\overrightarrow{(4; -1; 0)}| = 5 \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 0^2} = 5 \cdot \sqrt{16 + 1} = 5\sqrt{17}$;

5) $|2\vec{a} - 3\vec{c}| = |2\overrightarrow{(1; -2; 1)} - 3 \cdot \overrightarrow{(4; -1; 0)}| = |\overrightarrow{(2 \cdot 1 - 3 \cdot 4; 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1); 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0)}| =$
$= |\overrightarrow{(-10; -1; 2)}| = \sqrt{(-10)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{105}$;

6) $|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}| = |\overrightarrow{(3; -2; 2)} - 2\overrightarrow{(4; -1; 0)}| = |\overrightarrow{(3 - 2 \cdot 4; -2 - 2 \cdot (-1); 2 - 2 \cdot 0)}| =$
$= |\overrightarrow{(-5; 0; 2)}| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

8. $\vec{a}(n; 0,5; -0,5)$ буде одиничним, якщо $|\vec{a}| = 1$;
$|\vec{a}| = \sqrt{n^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = 1$; $n^2 + 0,25 + 0,25 = 1$; $n^2 + 0,5 = 1$; $n^2 = 0,5$;
$n = \pm\sqrt{0,5}$.
За умовою $n < 0$, отже, $n = -\sqrt{0,5}$.

9. Довжина вектора $\vec{a}(4; 2; m)$ буде більша за 6, якщо $|\vec{a}| > 6$.
$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + m^2} = \sqrt{20 + m^2}$; $\sqrt{20 + m^2} > 6$ (оскільки обидві частини нерівності додатні); $20 + m^2 > 36$; $m^2 - 16 > 0$; $(m - 4)(m + 4) > 0$; $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$, найменше натуральне $m = 5$.

10. Довжина вектора $\vec{a}(-1; m; 3)$ менша за 5, $|\vec{a}| < 5$; $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + m^2 + 3^2}$;
$\sqrt{10 + m^2} < 5$.
Оскільки обидві частини нерівності додатні, то $10 + m^2 < 25$; $m^2 - 15 < 0$;
$\left(m - \sqrt{15}\right)\left(m + \sqrt{15}\right) < 0$; $m \in \left(-\sqrt{15}; \sqrt{15}\right)$. $\sqrt{9} < \sqrt{15}$, $\sqrt{16} > \sqrt{15}$, отже, $m = 3$ — найбільше натуральне.

Вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ колінеарні, якщо $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$; $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

11. 1) $\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$; отже, $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$; колінеарні;

2) $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{3}{15}$; не колінеарні;

3) $\frac{3}{0} \neq \frac{0}{2} \neq \frac{0}{0}$; не колінеарні;

4) $\frac{0}{5} = \frac{0}{2} = \frac{0}{6}$; $\vec{a} = \vec{0}$; $\vec{0}$ і $\vec{b}$ колінеарні, отже, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні;

5) $\frac{\frac{1}{3}}{-1} \neq \frac{-1}{-3} \neq \frac{-5}{-15}$; не колінеарні.

12. Оскільки $\vec{a}(1; m; -1)$ і $\vec{b}(n; 1; 1)$ колінеарні, то $\frac{1}{n} = \frac{m}{1} = \frac{-1}{1}$,
звідси $n = m = -1$.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, а вектор $\vec{c}$ можна розкласти за $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

13. 1) $\vec{a}(-3; -3; 0)$; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; $\vec{e}_1(1; 0; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1; 0)$, $\vec{e}_3(0; 0; 1)$; $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ — неколінеарні.
$\vec{a} = -3\vec{e}_1 + (-3\vec{e}_2) + 0 \cdot \vec{e}_3 = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$. Отже, $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ — компланарні.

2) $\vec{b}(2; 0; -2)$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ — неколінеарні.
$\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$. Отже, $\vec{b}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ — некомпланарні.

aldz.net

3) $\vec{c}(1; 0; -2)$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$; $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_3$ — неколінеарні.
$\vec{c} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$. Отже, $\vec{c}, \vec{e}_1, \vec{e}_3$ — компланарні.

4) $\vec{a}(1; -1; 2)$; $\vec{b}(-2; 0; 1)$; $\vec{c}(5; -1; 0)$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, бо їхні координати не пропорційні.

Спробуємо розкласти $\vec{c}$ за $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо існують числа $m \neq 0$ і $n \neq 0$, що $\vec{c} = n\vec{a} + m\vec{b}$, то

$$\begin{cases} 5 = n \cdot 1 + m \cdot (-2), \\ -1 = n \cdot (-1) + m \cdot 0, \\ 0 = n \cdot 2 + m \cdot 1; \end{cases} \quad \begin{cases} n - 2m = 5, \\ -n = -1, \\ 2n + m = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 1, \\ m = -2, \\ 1 - 2 \cdot (-2) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 1, \\ m = -2, \\ 5 = 5. \end{cases}$$

Звідси $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, отже, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компланарні.

5) $\vec{d}(1; 0; 2)$; $\vec{b}(1; 1; -1)$; $\vec{p}(-1; -2; 4)$.

Вектори $\vec{d}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, бо їхні координати не пропорційні.

Спробуємо розкласти $\vec{p}$ за $\vec{d}$ і $\vec{b}$.

Якщо існують числа $m \neq 0$ і $n \neq 0$, що $\vec{p} = n\vec{d} + m\vec{b}$, то

$$\begin{cases} -1 = 1 \cdot n + 1 \cdot m, \\ -2 = 0 \cdot n + 1 \cdot m, \\ 4 = 2 \cdot n + (-1) \cdot m; \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2, \\ -1 = n - 2, \\ 4 = 2n + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2, \\ n = 1, \\ 4 = 2 \cdot 1 + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2, \\ n = 1, \\ 4 = 4. \end{cases}$$

Звідси $\vec{p} = \vec{d} - 2\vec{b}$, отже, $\vec{d}, \vec{p}, \vec{b}$ — компланарні.

6) $\vec{a}(0; 5; 3)$; $\vec{f}(3; 3; 3)$; $\vec{c}(1; 1; 4)$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ неколінеарні, бо їхні координати не пропорційні.

Спробуємо розкласти $\vec{f}$ за $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

Якщо існують числа $m \neq 0$ і $n \neq 0$, що $\vec{f} = n\vec{a} + m\vec{c}$, то

$$\begin{cases} 3 = n \cdot 0 + m \cdot 1, \\ 3 = 5 \cdot n + m \cdot 1, \\ 3 = 3 \cdot n + m \cdot 4; \end{cases} \quad \begin{cases} m = 3, \\ 3 = 5n + 3, \\ 3 = 3n + 12; \end{cases} \quad \begin{cases} m = 3, \\ n = 0, \\ 3 = 3 \cdot 0 + 12; \end{cases} \quad \begin{cases} m = 3, \\ n = 0, \\ 3 \neq 12. \end{cases}$$

Система не має розв'язків, тому дані вектори не компланарні.

Отже, $\vec{a}, \vec{f}, \vec{c}$ некомпланарні.

У завданнях 14–33 треба використати формули скалярного добутку векторів.

14. $\vec{a}(2; -2; 0)$, $\vec{b}(1; 0; 1)$, $\vec{c}(2; -1; 3)$.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 2$;
2) $\vec{b} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 2$;
3) $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 5$;
4) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = 6$.

15. $\vec{a}(-1; -2; 1)$, $\vec{c}(4; -1; m)$. $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot m = -2 + m$.

1) $-2 + m = 1$; $m = 3$;
2) $-2 + m = 2$; $m = 4$;
3) $-2 + m = 0$; $m = 2$;
4) $-2 + m = -1$; $m = 1$.

16. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, $\alpha = \angle(\vec{a}; \vec{b})$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$.

1) $\alpha = 90°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 90° = 0$;
2) $\alpha = 60°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 60° = \frac{1}{2}$;
3) $\alpha = 30°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

alldz.net

4) $\alpha = 135°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\alpha = 120°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

6) $\alpha = 180°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 180° = -1$;

7) $\alpha = 0°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 0° = 1$.

17. $\vec{a}(2; -1; 0)$.

Оскільки вектори $\vec{e}_1(1; 0; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1; 0)$, $\vec{e}_3(0; 0; 1)$ співнапрямлені з координатними осями, то знайдемо кути α, β, γ, де $\alpha = \angle(\vec{a}; \vec{e}_1)$, $\beta = \angle(\vec{a}; \vec{e}_2)$, $\gamma = \angle(\vec{a}; \vec{e}_3)$.

$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_1|}$; $\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_2|}$; $\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_3|}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$; $|\vec{e}_1| = 1 = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3|$.

$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,4\sqrt{5} > 0$, α — гострий;

$\cos\beta = \frac{2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5} = -0,2\sqrt{5} < 0$, β — тупий;

$\cos\gamma = \frac{2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$, $\gamma = 90°$ — прямий.

Отже, $\angle(\vec{a}; Ox)$ — гострий, $\angle(\vec{a}; Oy)$ — тупий, $\angle(\vec{a}; Oz)$ — прямий.

Якщо $0 < \alpha < 90°$, то $\cos\alpha > 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.
Якщо $\alpha = 90°$, то $\cos\alpha = 0$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Якщо $90° < \alpha < 180°$, то $\cos\alpha < 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, де $\alpha = \angle(\vec{a}; \vec{b})$.

18. $\vec{a}(-1; 2n; 0)$ і $\vec{b}(1; -1; 2)$.

1) $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $-1 \cdot 1 + 2n \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 0$; $-1 - 2n = 0$; $2n = -1$; $n = -0,5$.

2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, якщо $\frac{-1}{1} \neq \frac{2n}{-1} \neq \frac{0}{2}$; n — не існує.

3) Компланарні з вектором $\vec{c}(-1; 2; 2)$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть, якщо $\vec{c} = m\vec{a} + k\vec{b}$ ($\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні з п. 2). Тоді:

$$\begin{cases} -1 = m \cdot (-1) + k \cdot 1, \\ 2 = m \cdot (2n) + k \cdot (-1), \\ 2 = m \cdot 0 + k \cdot 2; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1, \\ m = 1 + 1, \\ 2 = 2mn - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1, \\ m = 2, \\ 2 \cdot 2 \cdot n = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1, \\ m = 2, \\ n = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Отже, при $n = \frac{3}{4}$ вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні.

19. $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = m \cdot m + 1 \cdot m + 3 \cdot (-2) = 0$; $m^2 + m - 6 = 0$; $m_1 = -3$, $m_2 = 2$.

Оскільки $m > 0$, то $m = 2$.

Отже, $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $m = 2$.

20. Див. № 19.

Оскільки $m < 0$, то $m = -3$. Отже, $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $m = -3$.

aldz.net

21. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; $\vec{a} \perp \vec{b}$, отже, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\alpha = \angle(\vec{c}; \vec{p})$; $\cos\alpha = \dfrac{\vec{c} \cdot \vec{p}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{p}|}$.

1) $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$;

$\vec{c} \cdot \vec{p} = (\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 2|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = -|\vec{a}|^2$;

$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 = 10|\vec{a}|^2$; $|\vec{c}| = |\vec{a}|\sqrt{10}$;

$|\vec{p}|^2 = (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 5|\vec{a}|^2$; $|\vec{p}| = |\vec{a}|\sqrt{5}$.

$\cos\alpha = \dfrac{-|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\sqrt{10} \cdot |\vec{a}|5} = \dfrac{-1}{\sqrt{50}} = \dfrac{-1}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$; $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right) = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

$|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$.

2) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{p} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$;

$\vec{c} \cdot \vec{p} = (\vec{a} + 2\vec{b})(5\vec{a} - 2\vec{b}) = 5\vec{a}^2 + 10\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 5|\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2$;

$\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}\vec{a} + 4\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 = 5|\vec{a}|^2$; $|\vec{c}| = \sqrt{5}|\vec{a}|$;

$\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2 = (5\vec{a} - 2\vec{b})^2 = 25\vec{a}^2 - 20\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 25|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 = 29|\vec{a}|^2$; $|\vec{p}| = \sqrt{29}|\vec{a}|$;

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{a}|^2}{\sqrt{5}|\vec{a}| \cdot \sqrt{29}|\vec{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{145}} = \dfrac{\sqrt{145}}{145}$; $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{145}}{145}$.

3) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

$\vec{c} \cdot \vec{p} = (2\vec{a} - 3\vec{b})(3\vec{a} + 2\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 9\vec{a}\vec{b} + 4\vec{a}\vec{b} - 6\vec{b}^2 = 6|\vec{a}|^2 - 6|\vec{b}|^2 = 0$;
отже, $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$.

4) $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{p} = 4\vec{a} - \vec{b}$.

$\vec{c} \cdot \vec{p} = (2\vec{a} + 3\vec{b})(4\vec{a} - \vec{b}) = 8\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 8|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 5|\vec{a}|^2$;

$\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = (2\vec{a} + 3\vec{b})^2 = 4\vec{a}^2 + 12\vec{b}\vec{a} + 9\vec{b}^2 = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 = 13|\vec{a}|^2$; $|\vec{c}| = \sqrt{13}|\vec{a}|$;

$\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2 = (4\vec{a} - \vec{b})^2 = 16\vec{a}^2 - 8\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 16|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 17|\vec{a}|^2$; $|\vec{p}| = \sqrt{17}|\vec{a}|$;

$\cos\alpha = \dfrac{5|\vec{a}|^2}{\sqrt{13}|\vec{a}| \cdot \sqrt{17}|\vec{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{13 \cdot 17}} = \dfrac{5}{\sqrt{221}} = \dfrac{5\sqrt{221}}{221}$; $\alpha = \arccos\dfrac{5\sqrt{221}}{221}$.

22. $\vec{p} \perp \vec{q}$, отже, $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$.

1) $\vec{p} = n\vec{a} + 17\vec{b}$; $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$; $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 5$; $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120°$.

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (n\vec{a} + 17\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = 3n\vec{a}^2 + 51\vec{a}\vec{b} - n\vec{a}\vec{b} - 17\vec{b}^2 = 0$.

$\vec{a}^2 = |\vec{a}| = 4$; $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 25$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 \cdot \cos 120° = 10 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -5$

$3 \cdot n \cdot 4 + 51 \cdot (-5) - n \cdot (-5) - 17 \cdot 25 = 0$; $12n - 255 + 5n - 425 = 0$;
$17n = 680$; $n = 40$. Отже, $n = 40$.

2) $\vec{p} = n\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$; $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 1$; $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 135°$.

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (n\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b}) = n\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 3n\vec{a}\vec{b} - 6\vec{b}^2 = 0$.

$\vec{a}^2 = |\vec{a}| = 4$; $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 1$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 135° = 2 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

$n \cdot 4 - 2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + 3 \cdot n \cdot \left(-\sqrt{2}\right) - 6 \cdot 1 = 0$; $4n - 3n\sqrt{2} = 6 - 2\sqrt{2}$;

alldz.net

$n(4-3\sqrt{2}) = 6-2\sqrt{2}$; $n = \dfrac{6-2\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$;

$\dfrac{(6-2\sqrt{2})\cdot(4+3\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})\cdot(4+3\sqrt{2})} = \dfrac{24-8\sqrt{2}+18\sqrt{2}-12}{16-18} = \dfrac{12+10\sqrt{2}}{-2} = -(6+5\sqrt{2})$;

$n = -(6+5\sqrt{2})$. Отже, $n = -6-5\sqrt{2}$.

23. 1) Розглянемо ситуацію, коли вектори довільні.

Наприклад: $\vec{a}(1; 1; 1)$, $\vec{b}(1; 2; 3)$, $\vec{c}(3; 2; 1)$.

$\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \vec{a}(1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1) = \vec{a}\cdot(10) = 10\vec{a} = \overline{(10; 10; 10)}$;

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = (1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3)\cdot\vec{c} = 6\vec{c} = \overline{(18; 12; 6)}$; $10\vec{a} \neq 6\vec{c}$.

Отже, в загальному випадку рівність не виконується.

2) Якщо хоча б один із векторів нульовий, рівність виконується:

$\vec{0}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \vec{0}(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = \vec{0}$; $(\vec{0}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = (0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3)\cdot\vec{c} = 0\cdot\vec{c} = \vec{0}$.

3) Якщо хоча б два з векторів колінеарні. Наприклад: $\vec{a} = \lambda\vec{c}$.

$\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \lambda\vec{c}(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = (\overline{\lambda c_1; \lambda c_2; \lambda c_3})\cdot(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) =$

$= \overline{(\lambda c_1(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3); \lambda c_2(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3); \lambda c_3(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3))}$;

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = (\lambda c_1b_1 + \lambda c_2b_2 + \lambda c_3b_3)\cdot(\overline{c_1; c_2; c_3}) =$

$= \overline{(\lambda c_1(c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3); \lambda c_2(c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3); \lambda c_3(c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3))}$.

Отже, рівність виконується.

Висновок: $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ виконується, якщо хоча б один із векторів нульовий або хоча б два з векторів колінеарні.

24. Якщо для довільного $\vec{c}$ виконується рівність $\vec{c}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a}$, це не обов'язково означає, що $\vec{b} = \vec{a}$.

Якщо $\vec{b} \neq \vec{a}$, але $\vec{c} \perp \vec{b}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, то $\vec{c}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$.

Висновок: не обов'язково.

25. $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 1$; $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120°$. $\alpha = \angle(2\vec{a} + 4\vec{b}; \vec{a} - \vec{b})$.

Позначимо $\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{d}|}$.

$\vec{c}\cdot\vec{d} = (2\vec{a} + 4\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 4|\vec{b}|^2 =$

$= 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot\cos 120° - 4\cdot 1 = 2 + 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 4 = 2 - 1 - 4 = -3$;

$|\vec{c}|^2 = \vec{c}^2 = (2\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 4\vec{a}^2 + 16\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^2 = 4|\vec{a}|^2 + 16\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 16|\vec{b}|^2 =$

$= 4 - 8 + 16 = 12$; $|\vec{c}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

$|\vec{d}|^2 = \vec{d}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + |\vec{b}|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$;

$|\vec{d}| = \sqrt{3}$; $\cos\alpha = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$;

$\alpha = \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\dfrac{1}{2} = \pi - 60° = 180° - 60° = 120°$.

Отже, $\alpha = 120°$.

alDz.net

26. $|\vec{c}| = |\vec{p}|$; $(\vec{c} + 2\vec{p}) \perp (5\vec{c} - 4\vec{p})$; $\alpha = \angle(\vec{c}; \vec{p})$; $\cos\alpha = \dfrac{\vec{c} \cdot \vec{p}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{p}|}$.

Оскільки $(\vec{c} + 2\vec{p}) \perp (5\vec{c} - 4\vec{p})$, то $(\vec{c} + 2\vec{p}) \cdot (5\vec{c} - 4\vec{p}) = 0$;

$5\vec{c}^2 + 10\vec{p} \cdot \vec{c} - 4\vec{p} \cdot \vec{c} - 8\vec{p}^2 = 0$; $5|\vec{c}|^2 + 6\vec{p} \cdot \vec{c} - 8|\vec{p}|^2 = 0$; $6\vec{p} \cdot \vec{c} - 3|\vec{c}|^2 = 0$;

$6\vec{p} \cdot \vec{c} = 3|\vec{c}|^2$; $\vec{p} \cdot \vec{c} = \dfrac{3|\vec{c}|^2}{6} = \dfrac{1}{2}|\vec{c}|^2$; $\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}|\vec{c}|^2}{|\vec{c}| \cdot |\vec{c}|} = \dfrac{1}{2}$;

$\alpha = \arccos\dfrac{1}{2}$; $\alpha = 60°$.

Отже, $\alpha = 60°$.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, обчислюється за формулою:

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi, \quad \varphi = \angle(\vec{a}; \vec{b}).$$

27. 1) $\vec{a}(0; 1; 1)$, $\vec{b}\left(\sqrt{3}; 2; -1\right)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$;

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 1$; $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4} > 0$,

$\varphi < 90°$; $\sin^2\varphi = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.

Оскільки $\varphi < 90°$, $\sin\varphi > 0$,

$\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. $S = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4} = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}$.

Отже, $S = \sqrt{15}$.

2) $\vec{a}(-2; 1; 1)$, $\vec{b}(1; 2; 0)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$; $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$; $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\varphi = 90°$.

$S = \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin 90° = \sqrt{30}$.

Отже, $S = \sqrt{30}$.

28. $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 1$; $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 4$; $|\vec{c}| = 5$;

$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 1$; $\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{c} = 1$;

$2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}) + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 1$; $2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}) + 1 + 16 + 25 = 1$;

$2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}) = -41$; $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c} = -20{,}5$.

29. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$; $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 4$; $|\vec{c}| = 5$;

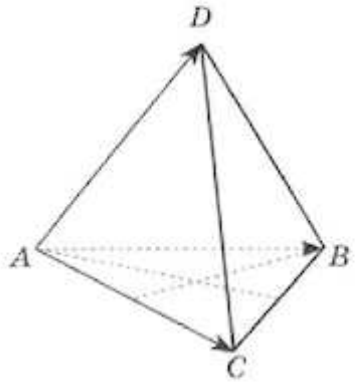
$|\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})^2 = 0$; $\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{c} = 0$;

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c}) = 0$; $3^2 + 4^2 + 5^2 + 2(\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c}) = 0$;

$2\left(\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c}\right) = -50$; $\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} = -25$.

alldz.net

30. $ABCD$ — правильний тетраедр, тому всі його грані — правильні трикутники, отже, всі вказані вектори мають однакові довжини.



$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=$

$=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}.$

Оскільки $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$, то $\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=0$;

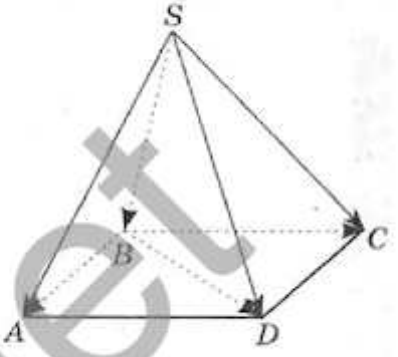
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos 60°$;

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\cos 60°$;

$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$, тому $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Отже, $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$.

31. $SABD$ — піраміда, $ABCD$ — прямокутник.



$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=k$. $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}$,

тоді $(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA})(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC})=k$;

$\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=k$.

Оскільки $ABCD$ — прямокутник, то

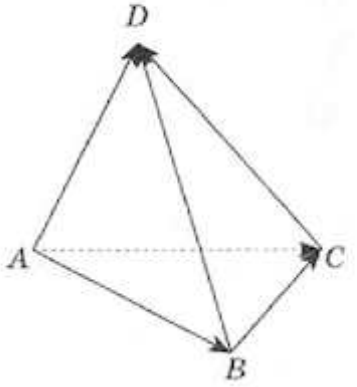
$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

$\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BC}=k$;

$\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SB}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=k$; $\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BD}=k$; $\overrightarrow{SB}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BD})=k$; $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SD}=k$.

Отже, $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SD}=k$.

32. $DABC$ — піраміда, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=12$.



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=12$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=12$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=12$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=12$.

Отже, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=12$.

33. $ABCD$ — тетраедр (див. рис. до задачі № 32).

1) Довести: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2)+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{CD}^2)$.

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+$

$+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot 2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Отже: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

2) *Довести:* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BD}^2)$.

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BD}^2)=\frac{1}{2}\left((\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\right)=$

alldz.net

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{DC}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\left(-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Отже, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

§ 8. Розв'язування задач координатно-векторним методом

ПОЯСНЕННЯ

Якщо площину α задано рівнянням $ax + by + cz + d_1 = 0$, то $\vec{n}(a; b; c)$ такий, що $\vec{n} \perp \alpha$ ($\vec{n}$ — нормаль-вектор площини).

Якщо дві площини α і β задані відповідно рівняннями $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, то при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ справедливо: $\alpha \parallel \beta$.

Якщо $A(x_0; y_0; z_0)$ не належить площині α: $ax + by + cz + d = 0$, то відстань від точки до площини можна обчислити за формулою: $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Кут між двома площинами обчислюється як кут між їх нормалями (гострий).

α: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$;

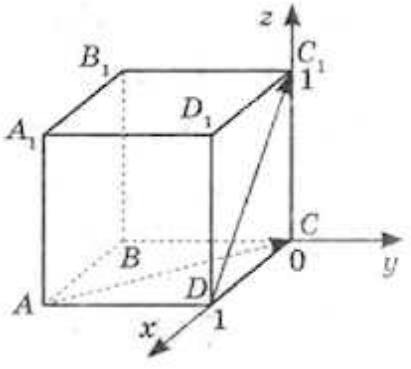
β: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$; $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$.

$$\angle(\alpha; \beta) = (\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \varphi; \quad \cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Завдання 6

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці C і спрямуємо вісь Ox уздовж ребра CD, Oy — уздовж ребра BC, Oz — уздовж ребра CC_1. Довжину ребра куба візьмемо за одиницю вимірювання.



1) Тоді $C(0; 0; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$, $A(1; -1; 0)$, $C_1(0; 0; 1)$, $\overrightarrow{AC}(-1; 1; 0)$,

$\overrightarrow{DC_1}(-1; 0; 1)$; $\varphi = \angle\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DC_1}\right) = \angle(AC; DC_1)$.

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC_1}\right|} = \frac{|-1\cdot(-1) + (+1)\cdot 0 + 0\cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (+1)^2 + 0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|+1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

$\varphi = \arccos\frac{1}{2}$.

Отже, $\varphi = 60°$.

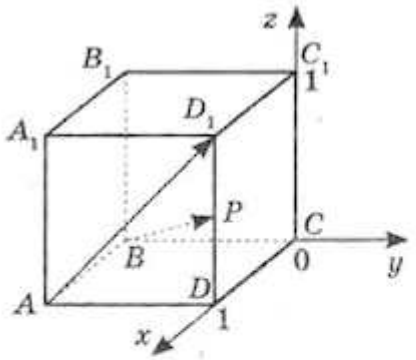
Кут між прямими дорівнює гострому куту між векторами, які відповідно паралельні даним прямим.

ruloz.net

2) $A(1; -1; 0)$, $D_1(1; 0; 1)$, $B(0; -1; 0)$,
$D(1; 0; 0)$; P — середина DD_1;

$P\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{1+0}{2}\right)$; $P\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{AD_1}(0; 1; 1)$,

$\overrightarrow{BP}\left(1-0; 0+1; \frac{1}{2}-0\right)$; $\overrightarrow{BP}\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

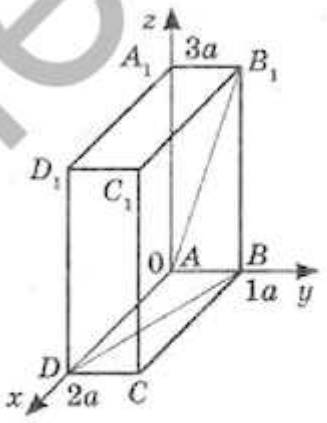


$\angle(AD_1; BP) = \varphi = \angle\left(\overrightarrow{AD_1}; \overrightarrow{BP}\right)$, $\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{BP}\right|}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|}$.

$$\cos\varphi = \frac{\left|0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2,25}} = \frac{1,5}{\sqrt{2} \cdot 1,5} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\varphi = 45°$.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед; $AB = a$, $AD = 2a$, $AA_1 = 3a$.
Введемо прямокутну систему координат із початком у точці A і спрямуємо Ox вздовж ребра AD, Oy — вздовж ребра AB, Oz — вздовж ребра AA_1.
Довжину ребра AB візьмемо за a.
Тоді $A(0; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $D(2a; 0; 0)$, $C(2a; a; 0)$,
$A_1(0; 0; 3a)$, $B_1(0; a; 3a)$, $D_1(2a; 0; 3a)$, $C_1(2a; a; 3a)$.



$\angle(BD; AB_1) = \angle\left(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AB_1}\right) = \varphi$, $\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB_1}\right|}$;

$\overrightarrow{BD}(2a; 0-a; 0)$; $\overrightarrow{BD}(2a; -a; 0)$; $\overrightarrow{AB_1}(0; a; 3a)$;

$$\cos\varphi = \frac{\left|2a \cdot 0 + (-a) \cdot a + 0 \cdot 3a\right|}{\sqrt{(2a)^2 + (-a)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + a^2 + (3a)^2}} =$$

$$= \frac{|-1|a^2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot a^2} = \frac{|-1|}{\sqrt{25 \cdot 2}} = \frac{+1}{5\sqrt{2}} = \frac{+\sqrt{2}}{10} = 0,1\sqrt{2}.$$

Оскільки кут між прямими гострий, то $\varphi = \arccos 0,1\sqrt{2}$.

$\angle(BD; AB_1) = \arccos 0,1\sqrt{2}$. Отже, $\angle(BD; AB_1) = \arccos 0,1\sqrt{2}$.

3. Перевіримо належність точки A до прямої OC.

Рівняння OC: $\frac{x-0}{8-0} = \frac{y-0}{6-0} = \frac{z-0}{0-0}$; $\frac{x}{8} = \frac{y}{6}$;

$6x - 8y = 0$; $3x - 4y = 0$ (пряма належить площині xOy).
$A(10; 0; 0)$, $3 \cdot 10 - 4 \cdot 0 = 0$; $30 \neq 0$, отже, $A \notin OC$.

Проведемо $AM \perp OC$, тоді $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$; $M \in OC$, $M \in (xOy)$.

$M(x; y; 0)$; $\overrightarrow{AM}(x-10; y-0; z-0)$; $\overrightarrow{AM}(x-10; y; 0)$; $\overrightarrow{OC}(8; 6; 0)$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OC} = (x-10) \cdot 8 + y \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 0$; $8x - 80 + 6y = 0 \mid : 2$; $4x + 3y = 40$.

Знайдемо розв'язки системи:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \mid \cdot 3, \\ 4x + 3y = 40 \mid \cdot 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x - 12y = 0, \\ 16x + 12y = 160 \end{cases} + \quad \begin{cases} 25x = 160, \\ 3x = 4y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6,4, \\ y = 4,8. \end{cases}$$

Отже, $M(6,4; 4,8; 0)$.

$|AM| = \sqrt{(10-6,4)^2 + 4,8^2 + 0^2} = \sqrt{3,6^2 + 4,8^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$.

Отже, відстань від точки A до прямої OC дорівнює 6.

alax.net

4. BP — висота ΔABC; $A(1; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(4; 3; 0)$.

Складемо рівняння AC: $\dfrac{x-1}{4-1} = \dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{z-0}{0-0}$; $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{3}$;

$x - 1 = y$; $x - y = 1$ (пряма належить площині xOy).

BP — висота, $BP \perp AC$, тоді $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$B(0; 5; 0)$, $P \in AC$, $P \in (xOy)$, $P(x; y; 0)$.

$\overrightarrow{BP}(x - 0; y - 5; 0 - 0)$; $\overrightarrow{BP}(x; y - 5; 0)$; $\overrightarrow{AC}(3; 3; 0)$;

$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = x \cdot 3 + (y - 5) \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0$; $3x + 3y - 15 = 0 \mid 3$; $x + y - 5 = 0$.

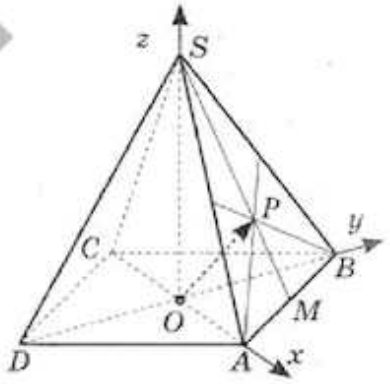
Знайдемо розв'язки системи: $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 5; \end{cases} \begin{cases} 2x = 6, \\ 2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases}$ отже, $P(3; 2; 0)$.

$|BP| = \sqrt{3^2 + (2-5)^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Отже, висота трикутника $3\sqrt{2}$.

5. $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, отже, основа піраміди — квадрат $ABCD$, а основою висоти піраміди SO є точка перетину діагоналей квадрата — точка O, $SA = SB = SC = SD$, SM — медіана ΔASB, P — точка перетину медіан ΔASB.

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці O і спрямуємо Ox вздовж діагоналі CA, Oy — вздовж BD, Oz — вздовж висоти OS. Довжину відрізків OA і OB візьмемо за a (за властивістю квадрата $AO = OB$), довжину SO — за b. Тоді $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $S(0; 0; b)$. $CA \perp BD$ за властивістю квадрата.



M — середина AB,

$M\left(\dfrac{a+0}{2}; \dfrac{0+a}{2}; \dfrac{0+0}{2}\right)$; $M\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$.

P — точка перетину медіан ΔASB,

$P \in SM$, $SP : PM = 2 : 1$, тому

$P\left(\dfrac{1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{a}{2}}{3}; \dfrac{1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{a}{2}}{3}; \dfrac{1 \cdot b + 2 \cdot 0}{3}\right)$; $P\left(\dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3}; \dfrac{b}{3}\right)$.

Знайдемо $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OP}\left(\dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3}; \dfrac{b}{3}\right)$; $\overrightarrow{AB}(-a; a; 0)$.

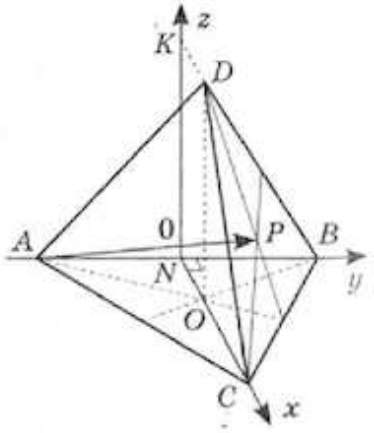
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a}{3} \cdot (-a) + \dfrac{a}{3} \cdot a + \dfrac{b}{3} \cdot 0$.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = -\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{3} + 0$, отже, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AB}$, значить, прямі, що містять дані вектори, також перпендикулярні.

Висновок: $OP \perp AB$.

6. $DABC$ — правильна трикутна піраміда, отже, основа піраміди — правильний трикутник ABC, а основою висоти піраміди SO є точка перетину медіан трикутника — точка O. $SA = SB = SC$. SM — медіана ΔCBD, P — точка перетину медіан ΔCBD.

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці N (CN — медіана ΔABC, оскільки трикутник правильний, $CN \perp AB$) і спрямуємо вісь Ox вздовж NC, Oy — вздовж NB, Oz — вздовж NK ($NK \perp (ABC)$, $NK \parallel OD$). Довжину відрізка NC візьмемо за a, NK за b.



aidz.net

У ΔCNB: $\angle N = 90°$, $\angle B = 60°$, $CN = a$; $BN = CN \cdot \operatorname{ctg} B = a \cdot \operatorname{ctg} 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Тоді $N(0;\ 0;\ 0)$, $C(a;\ 0;\ 0)$, $B\left(0;\ \frac{a\sqrt{3}}{3};\ 0\right)$, $A\left(0;\ \frac{-a\sqrt{3}}{3};\ 0\right)$.

O — точка перетину медіан ΔABC, $CO : ON = 2 : 1$.

$O\left(\frac{1\cdot a + 2\cdot 0}{3};\ \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 0}{3};\ \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 0}{3}\right)$; $O\left(\frac{a}{3};\ 0;\ 0\right)$; $D\left(\frac{a}{3};\ 0;\ b\right)$.

M — середина BC; $M\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{3}}{6};\ 0\right)$.

P — точка перетину медіан, $DP : PM = 2 : 1$.

$P\left(\frac{1\cdot\frac{a}{3} + 2\cdot\frac{a}{2}}{3};\ \frac{1\cdot 0 + 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}}{3};\ \frac{1\cdot b + 2\cdot 0}{3}\right)$; $P\left(\frac{4a}{9};\ \frac{a\sqrt{3}}{9};\ \frac{b}{3}\right)$.

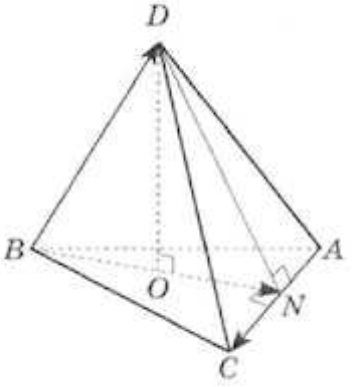
Знайдемо $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CB}$. $\overrightarrow{AP}\left(\frac{4}{9}a - 0;\ \frac{a\sqrt{3}}{9} + \frac{a\sqrt{3}}{3};\ \frac{b}{3} - 0\right)$; $\overrightarrow{AP}\left(\frac{4}{9}a;\ \frac{4a\sqrt{3}}{9};\ \frac{b}{3}\right)$;

$\overrightarrow{CB}\left(0 - a;\ \frac{a\sqrt{3}}{3} - 0;\ 0 - 0\right)$; $\overrightarrow{CB}\left(-a;\ \frac{a\sqrt{3}}{3};\ 0\right)$. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CB} = -\frac{4}{9}a^2 + \frac{4a^2\cdot 3}{27} + 0 = 0$.

Отже, $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CB}$, значить, прямі, що містять дані вектори, також перпендикулярні.

Висновок: $AP \perp CB$.

7. Нехай $DABC$ — зображення даної трикутної піраміди, D — вершина, DO — висота піраміди; BN — висота грані ABC, $O \in BN$ (за умовою), $DO \perp (ABC)$, $BN \perp AC$ (як висота), ON — проекція DN на площину (ABC), тому $DN \perp AC$ (за теоремою про три перпендикуляри), звідси $\overrightarrow{DN} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.



З ΔBND: $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD}$; $\left(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = 0$;

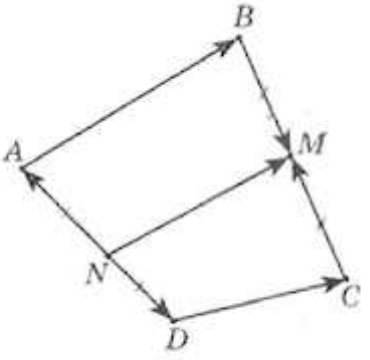
$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$; $0 - \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$; $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\left(BN \perp AC;\ \overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AC} = 0\right)$.

Оскільки $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, то $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, отже, $BD \perp AC$.

Висновок: два ребра піраміди перпендикулярні.

8. Точки A, B, C, D — дані, M і N — середини BC і AD відповідно. $MN = 0{,}5(AB + CD)$ за умовою.



З чотирикутника $NABM$: $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

З чотирикутника $NDCM$: $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}$.

Маємо: $2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}$;

$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$; $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$;

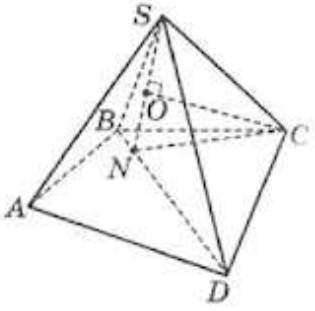
$2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

Тоді $\left|\overrightarrow{NM}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right|$; за умовою $\overrightarrow{MN} = 0{,}5\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|\right)$, звідси

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|$, це означає, що $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, тому $AB \parallel CD$.

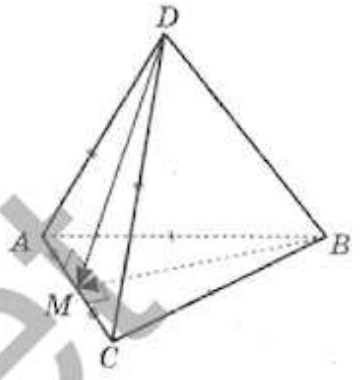
alov.net

9. Нехай $ABCD$ — даний тетраедр. Точки M, N, P — середини AB, CD, BC відповідно. φ — площина, що проходить через точку P, за умовою $\varphi \parallel DM$, $\varphi \parallel AN$. Прямі DM і AN є мимобіжними. Площина, паралельна цим прямим, є ГМТ середин відрізків з кінцями на цих прямих, тому площина φ проходить через середину E відрізка DN.



Оскільки за умовою $\varphi \parallel AE$, то $EL \parallel AE$, де L — точка перетину φ і AD. Оскільки E — середина DE, то за теоремою Фалеса L — середина AD, LE — середня лінія ΔAED.
Аналогічно F — середина AM, F — точка перетину φ і AB, $PELF$ — утворений переріз, L — середина AD, тому $AL : LD = 1 : 1$.

10. $ABCD$ — тетраедр, $AB = BC$, отже, ΔABC рівнобедрений з основою AC; $AD = DC$, отже, ΔADC рівнобедрений з основою AC.
Позначимо M — середина AC, тоді DM і BM — медіани, а отже, висоти ΔADC і ΔABC відповідно.



Звідси: $DM \perp AC$; $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$;

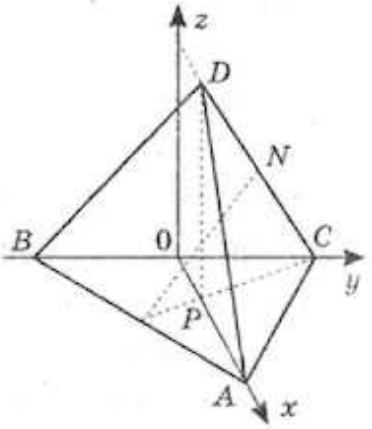
$BM \perp AC$; $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

З ΔBDM: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$;

$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$; $0 - \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Отже, $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, $DB \perp AC$.
Висновок: $BD \perp AC$.

11. $ABCD$ — правильний тетраедр з довжиною ребра l. M — середина AB, N — середина CD. DP — висота тетраедра, P — точка перетину медіан ΔABC; AO і CM — медіани ΔABC; $OC = OB = \frac{l}{2}$; $CA = l$.



У ΔAOC: $\angle O = 90°$; $AO^2 = AC^2 - CO^2$;

$AO^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4}$; $AO = \frac{l}{2}\sqrt{3}$.

P — точка перетину медіан;

$OP = \frac{1}{3}AO$; $OP = \frac{l}{6}\sqrt{3}$. $AP = \frac{2}{3}AO$;

$AP = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{l}{3}\sqrt{3}$.

У ΔADP: $\angle P = 90°$; $AD = l$; $DP^2 = AD^2 - AP^2$;

$DP^2 = l^2 - \left(\frac{l}{3}\sqrt{3}\right)^2 = l^2 - \frac{l^2}{3} = \frac{2}{3}l^2$; $DP = l\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці O і спрямуємо вісь Ox вздовж OA, Oy — вздовж OC, Oy паралельно PD ($PD \parallel xOy$).

Тоді $O(0; 0; 0)$; $C\left(0; \frac{l}{2}; 0\right)$; $B\left(0; -\frac{l}{2}; 0\right)$; $A\left(\frac{l}{2}\sqrt{3}; 0; 0\right)$; $P\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right)$;

$D\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}; 0; l\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; M — середина AB; $M\left(\frac{\frac{l}{2}\sqrt{3} + 0}{2}; \frac{0 + \left(-\frac{l}{2}\right)}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$;

$M\left(\frac{l\sqrt{3}}{4}; -\frac{l}{4}; 0\right)$.

aldz.net

N — середина CD; $N\left(\dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{6}+0}{2};\ \dfrac{0+\frac{l}{2}}{2};\ \dfrac{l\sqrt{\frac{2}{3}}+0}{2}\right)$; $N\left(\dfrac{l\sqrt{3}}{12};\ \dfrac{l}{4};\ \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

1) $MN=\sqrt{\left(\dfrac{l\sqrt{3}}{4}-\dfrac{l\sqrt{3}}{12}\right)^2+\left(-\dfrac{l}{4}-\dfrac{l}{4}\right)^2+\left(\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2l\sqrt{3}}{12}\right)^2+\left(-\dfrac{2l}{4}\right)^2+\left(\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{l^2\cdot 3}{36}+\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{l^2\cdot 2}{4\cdot 3}}=\sqrt{\dfrac{l^2}{12}+\dfrac{3l^2}{12}+\dfrac{2l^2}{12}}=\sqrt{\dfrac{6l^2}{12}}=\sqrt{\dfrac{l^2}{2}}=\dfrac{l}{\sqrt{2}}=l\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\overrightarrow{MN}\left(\dfrac{l\sqrt{3}}{12}-\dfrac{l\sqrt{3}}{4};\ \dfrac{l}{4}+\dfrac{l}{4};\ \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $\overrightarrow{MN}\left(\dfrac{-l\sqrt{3}}{6};\ \dfrac{l}{2};\ \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $|\overrightarrow{MN}|=l\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (п. 1);

$\overrightarrow{BC}\left(0-0;\ \dfrac{l}{2}+\dfrac{l}{2};\ 0-0\right)$; $\overrightarrow{BC}(0;\ l;\ 0)$; $|\overrightarrow{BC}|=l$.

$\angle(MN;\ BC)=\varphi=\angle\left(\overrightarrow{MN};\ \overrightarrow{BC}\right)$; $\cos\varphi=\dfrac{|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$;

$\cos\varphi=\dfrac{\left|-\frac{l\sqrt{3}}{6}\cdot 0+\frac{l}{2}\cdot l+\frac{l}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 0\right|}{\frac{l}{2}\sqrt{2}\cdot l}=\dfrac{\frac{l^2}{2}}{l^2\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}}=45°$.

3) $\overrightarrow{AB}\left(0-\dfrac{l}{2}\sqrt{3};\ -\dfrac{l}{2}-0;\ 0-0\right)$; $\overrightarrow{AB}\left(-\dfrac{l}{2}\sqrt{3};\ -\dfrac{l}{2};\ 0\right)$;

$\overrightarrow{CD}\left(\dfrac{l\sqrt{3}}{6}-0;\ 0-\dfrac{l}{2};\ l\sqrt{\dfrac{2}{3}}-0\right)$; $\overrightarrow{CD}\left(\dfrac{l\sqrt{3}}{6};\ -\dfrac{l}{2};\ l\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-\dfrac{l}{2}\sqrt{3}\cdot l\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\left(-\dfrac{l}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{l}{2}\right)+0\cdot l\sqrt{\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{l^2}{4}+0=0.$

Отже, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$, тому $AB\perp CD$.

4) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{l\sqrt{3}}{6}\cdot\left(-\dfrac{l}{2}\sqrt{3}\right)+\dfrac{l}{2}\cdot\left(-\dfrac{l}{2}\right)+\left(\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\cdot 0=\dfrac{l^2}{4}-\dfrac{l^2}{4}+0=0.$

Отже, $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$, тому $MN\perp AB$.

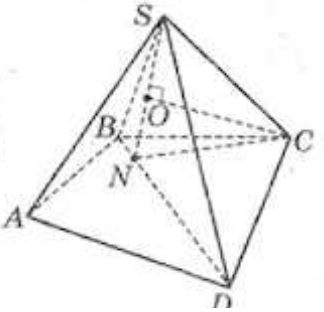
$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD}=-\dfrac{l\sqrt{3}}{6}\cdot\dfrac{l\sqrt{3}}{6}+\dfrac{l}{2}\cdot\left(-\dfrac{l}{2}\right)+\dfrac{l}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot l\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-l^2}{12}-\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{l^2\cdot 2}{2\cdot 3}=$

$=\dfrac{-4l^2}{12}+\dfrac{l^2}{3}=-\dfrac{l^2}{3}+\dfrac{l^2}{3}=0$. Отже, $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{CD}$, тому $MN\perp CD$.

Висновок: 1) $MN=l\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\angle(MN;\ BC)=45°$; 3) $AB\perp CD$;

4) $MN\perp AB$, $MN\perp CD$.

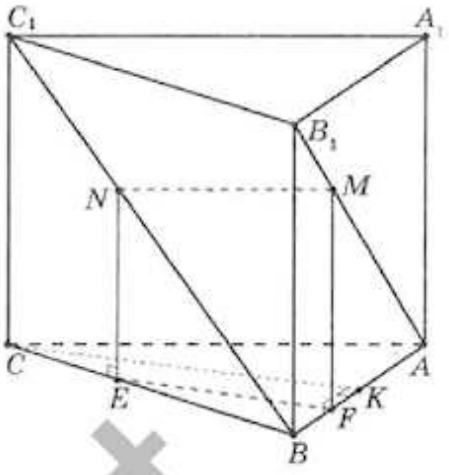
12. Нехай $SABCD$ — зображення даної чотирикутної піраміди; SBD — діагональний переріз, SN — висота цього перерізу, $SN\perp BD$; O — проекція вершини C на площину (SBD), тоді $CO\perp(SBD)$. За умовою $O\in SN$, $CO\perp SN$. Маємо: $CO\perp(SBD)$; CN — похила, ON — проекція; $SN\perp BD$, $ON\perp BD$, тому $CN\perp BD$ (за теоремою про три перпендикуляри). $\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{BD}=0$



ala-z.net

З ΔCNS: $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SN}$; $(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SN}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0$; $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{SN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$;
$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{BD} + 0 = 0$; $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ($\overrightarrow{SN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, оскільки $SN \perp BD$, $\overrightarrow{SN} \perp \overrightarrow{BD}$).
Отже, $\overrightarrow{CS} \perp \overrightarrow{BD}$, $CS \perp BD$.
Висновок: бічне ребро перпендикулярне до вказаної діагоналі.

13. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — зображення даної правильної призми, кожне ребро якої дорівнює a, тому основи — ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні, бічні грані — квадрати. $M \in AB_1$, $N \in BC_1$, $MN \perp AB$,



$$MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad AB_1 = BC_1 = a\sqrt{2}.$$

Спроектуємо відрізок MN на (ABC):
$MF \perp AB$, $NE \perp CB$.
Оскільки $NM \perp AB$, то $EF \perp AB$;

$$EF = NM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Проведемо CK — висоту й медіану ΔABC;

$CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $CK \perp AB$, тому $EF \parallel CK$, а $\Delta CKB \sim \Delta EFB$; $\frac{CK}{EF} = \frac{CB}{BE} = \frac{KB}{FB}$.

Позначимо FB за x, BE за y. $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{a}{y} = \frac{\frac{a}{2}}{x}$; $\frac{3}{2} = \frac{a}{y} = \frac{a}{2x}$; $y = \frac{2}{3}a$; $x = \frac{a}{3}$.

У ΔCC_1B: $CC_1 \perp BC$; $NE \perp BC$, $CC_1 \parallel NE$, тоді $\Delta CC_1B \sim \Delta ENB$;

$$\frac{C_1B}{NB} = \frac{CB}{BE}; \quad \frac{a\sqrt{2}}{NB} = \frac{a}{\frac{2}{3}a}; \quad \frac{a\sqrt{2}}{NB} = \frac{3}{2}; \quad NB = \frac{2}{3}a\sqrt{2}.$$

$$C_1N = C_1B - BN = a\sqrt{2} - \frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}; \quad \frac{C_1N}{NB} = \frac{\frac{1}{3}a\sqrt{2}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

У ΔBB_1A: $BB_1 \perp AB$; $MF \perp AB$, $BB_1 \parallel MF$; тоді $\Delta BB_1A \sim \Delta KMA$;

$$\frac{B_1A}{MA} = \frac{BA}{FA}; \quad \frac{a\sqrt{2}}{MA} = \frac{a}{a - \frac{a}{3}}; \quad \frac{a\sqrt{2}}{MA} = \frac{a}{\frac{2}{3}a}; \quad \frac{a\sqrt{2}}{MA} = \frac{3}{2}; \quad MA = \frac{2}{3}a\sqrt{2}.$$

$$B_1M = B_1A - AM = a\sqrt{2} - \frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}; \quad \frac{B_1M}{MA} = \frac{\frac{1}{3}a\sqrt{2}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $C_1N : NB = B_1M : MA = 1 : 2$.

Діагоналі прямокутного паралелепіпеда точкою перетину діляться навпіл: протилежні ребра рівні і паралельні, отже, відповідні їм вектори рівні або протилежні.

14. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — зображення даного прямокутного паралелепіпеда, O — точка перетину діагоналей AC_1, DB_1, BD_1. α, β, γ — кути, під якими з точки O видно ребра паралелепіпеда: $\angle AOB = \alpha$; $\angle B_1OC_1 = \beta$; $\angle BOB_1 = \gamma$.

Позначимо $\overrightarrow{BA}$ за $\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}$ за $\vec{b}$; $\overrightarrow{BB_1}$ за $\vec{c}$, візьмемо ці три некомпланарні вектори за базис. Тоді: $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

aldz.net

$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$;

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC_1} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$; $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$;

$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BB_1} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = -\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}(-\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$.

Позначимо довжину діагоналі за d: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

$OA = OB = OB_1 = OC_1 = \frac{d}{2}$; $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OC_1}| = \frac{d}{2}$;

$|\vec{a}| = a$; $|\vec{b}| = b$; $|\vec{c}| = c$.

Маємо:

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\alpha = \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos\alpha = \frac{d^2}{4}\cos\alpha$.

Аналогічно: $\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OC_1} = \frac{d^2}{4}\cos\beta$; $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB_1} = \frac{d^2}{4}\cos\gamma$.

Додамо відповідні частини рівностей:

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB_1} = \frac{d^2}{4}\cos\alpha + \frac{d^2}{4}\cos\beta + \frac{d^2}{4}\cos\gamma$;

$\frac{d^2}{4}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB_1}$;

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$

$= \frac{4}{d^2}\left((\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) + (-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) + (-\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\right) \cdot \frac{1}{4}$;

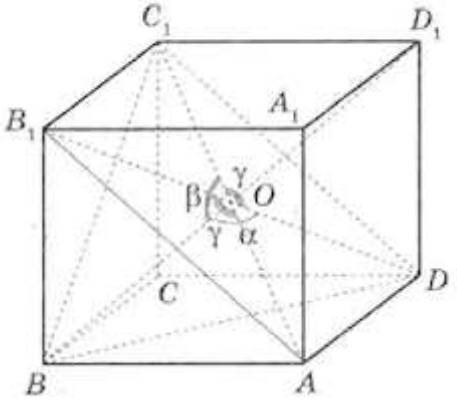
$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = (2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{a}^2 - \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{c} + \vec{c}^2) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{d^2}$.

Оскільки $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{b} \perp \vec{c}$, то $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{a} \perp \vec{c}$, то $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = b^2$; $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = a^2$; $\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = c^2$.

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{4}{d^2}(b^2 + a^2 + c^2) \cdot \frac{1}{4}$; $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{d^2}{d^2} = 1$.

Висновок: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

15. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — зображення даного прямокутного паралелепіпеда, O — точка перетину діагоналей AC_1, DB_1, BD_1; α, β, γ — кути, під якими з точки O видно діагоналі граней, що виходять з однієї вершини: AB_1 — діагональ ABB_1A_1; $\angle AOB_1 = \gamma$; BC_1 — діагональ BB_1C_1C; $\angle BOC_1 = \beta$; BD — діагональ $ABCD$; $\angle BOD = \alpha$.



Позначимо $\overrightarrow{BA}$ за $\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}$ за $\vec{b}$; $\overrightarrow{BB_1}$ за $\vec{c}$, беремо ці три некомпланарні вектори за базис: $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$; $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = b^2$; $\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = c^2$.

Тоді $\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$;

$\overrightarrow{OD_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$; $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$;

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} - \vec{c})$ (див. № 14).

aldz.net

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OC_1}| = |\overrightarrow{OD}| = \frac{d}{2}$.

Маємо: $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{d^2}{4}\cos\alpha$; $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC_1} = \frac{d^2}{4}\cos\beta$; $\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{d^2}{4}\cos\gamma$.

Додамо відповідні частини рівностей:

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{d^2}{4}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma);$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{4}{d^2}\left(\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OD}\right);$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$$

$$= \frac{4}{d^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left((\vec{b} + \vec{a} - \vec{c})(-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) + (-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{b} + \vec{a} - \vec{c})\right);$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{1}{d^2}(-b^2 - a^2 - c^2); \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{-(b^2 + a^2 + c^2)}{d^2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{-d^2}{d^2}; \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1.$$

Висновок: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1$.

§ 9. Векторний добуток векторів

ПОЯСНЕННЯ

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$; $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$; $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, $\varphi = \angle(\vec{a}; \vec{b})$.

$\vec{a} \times \vec{b} > 0$, якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — права трійка векторів; $\vec{a} \times \vec{b} < 0$, якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — ліва трійка векторів.

Завдання 7

1. Скалярний і векторний добутки двох векторів є результатом взаємодії цих векторів.
   Результат скалярного добутку — скаляр (число); результат векторного добутку — вектор.

2. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}; \vec{b})$.

   $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin\varphi$; $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sin\varphi$; оскільки $0 \le \varphi \le 180°$, то $0 \le \sin\varphi \le 1$.

   Отже, $0 \le |\vec{a} \times \vec{b}| \le 1$.

3. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні вектори; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

   1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = \sin\varphi$. Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$; $\cos\varphi = \alpha$; $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \alpha^2}$; $\sin\varphi \ge 0$.

   2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = \sin\varphi$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$; $|\vec{a} \times \vec{b}| = \beta$; $\sin\varphi = \beta$; $\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \pm\sqrt{1 - \beta^2}$ ($0 < \varphi < 90°$, $\cos\varphi > 0$; $90° < \varphi < 180°$, $\cos\varphi < 0$).

   3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$; $\sin\varphi = \cos\varphi$; $\sin\varphi > 0$, тоді $\cos\varphi > 0$, отже, $\varphi = 45°$.

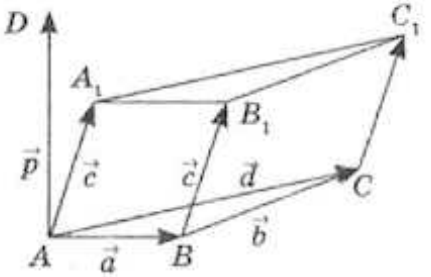
4. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$; $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\sin\varphi}$; $\varphi \ne 0$, $\varphi \ne 180°$;

   $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$; $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\cos\varphi}$; $\varphi \ne 90°$.

alldz.net

Тоді $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\sin\varphi}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\cos\varphi}$; $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi$, $\varphi=\angle(\vec{a};\vec{b})$.

5. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — дані вектори.



1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$; $\vec{a}\nparallel\vec{b}$; $|\vec{d}\times\vec{c}|=|\vec{p}|$; $|\vec{d}\times\vec{c}|=S_{ACC_1A_1}$;

2) $|\vec{a}\times\vec{c}|=S_{ABB_1A_1}$; $|\vec{b}\times\vec{c}|=S_{BCC_1B_1}$; $|\vec{d}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$,

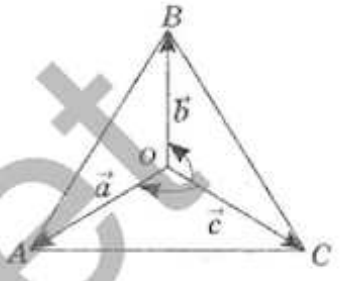
тоді $|(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}|<|\vec{a}\times\vec{c}|+|\vec{b}\times\vec{c}|$.

3) Якщо $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $|\vec{d}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$,

тоді $|(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}|<|\vec{a}\times\vec{c}|+|\vec{b}\times\vec{c}|$.

Отже, $S_{ACC_1A_1}\le S_{ABB_1A_1}+S_{BCC_1B_1}$. $|(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}|<|\vec{a}\times\vec{c}|+|\vec{b}\times\vec{c}|$.

6. 1) ΔABC — правильний, O — центр, $OA=OB=OC=1$.



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$; $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$;

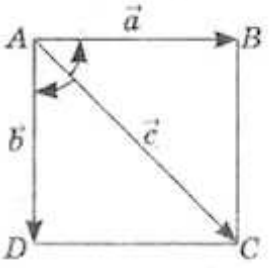
$\angle BOC=\angle COA=120^\circ$.

$|\vec{p}|=|\vec{c}\times\vec{b}|=|\vec{c}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin120^\circ=1\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$|\vec{q}|=|\vec{c}\times\vec{a}|=|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$|\vec{p}|=|\vec{q}|$, але $\vec{p}=-\vec{q}$, бо трійки векторів $(\vec{b},\vec{c},\vec{p})$ і $(\vec{a},\vec{c},\vec{q})$ мають протилежну орієнтацію, тоді $|\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}|=|\vec{q}-\vec{q}|=0$.

2) $ABCD$ — квадрат зі стороною 1; $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$.



AC — діагональ квадрата, $\angle DAC=\angle BAC=45^\circ$.

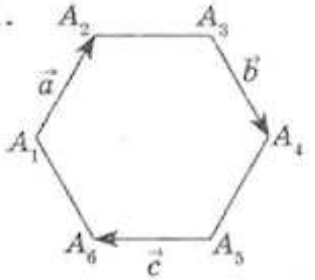
$AC=\sqrt{2}$. $|\vec{a}|=1$; $|\vec{b}|=1$; $|\vec{c}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$|\vec{p}|=|\vec{c}\times\vec{a}|=|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$;

$|\vec{q}|=|\vec{c}\times\vec{b}|=|\vec{c}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$;

$|\vec{p}|=|\vec{q}|$, але $\vec{p}=-\vec{q}$, бо трійки векторів $(\vec{a},\vec{c},\vec{p})$ і $(\vec{b},\vec{c},\vec{q})$ мають протилежну орієнтацію. Тоді $|\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}|=|-\vec{q}+\vec{q}|=0$.

3) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — правильний шестикутник зі стороною 1.



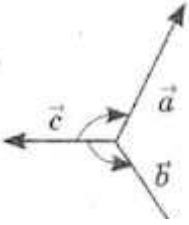
$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}$; $\overrightarrow{A_3A_4}=\vec{b}$; $\overrightarrow{A_5A_6}=\vec{c}$; $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

$\overrightarrow{A_5A_6}=\overrightarrow{A_3A_2}$ (за властивістю правильного шестикутника).

$\angle A_1A_2A_3=\angle A_2A_3A_4=120^\circ$; $\angle(\vec{c};\vec{a})=\angle(\vec{b};\vec{c})=120^\circ$.

$|\vec{p}|=|\vec{c}\times\vec{b}|=|\vec{c}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$|\vec{q}|=|\vec{c}\times\vec{a}|=|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;



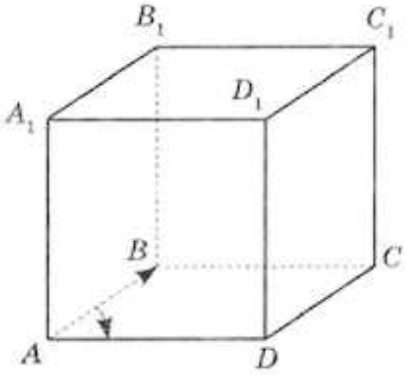
$|\vec{p}|=|\vec{q}|$, але $\vec{p}=-\vec{q}$, бо трійки векторів $(\vec{b},\vec{c},\vec{p})$ і $(\vec{a},\vec{c},\vec{q})$ мають протилежну орієнтацію. Тоді $|\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}|=|\vec{q}-\vec{q}|=0$.

alez.net

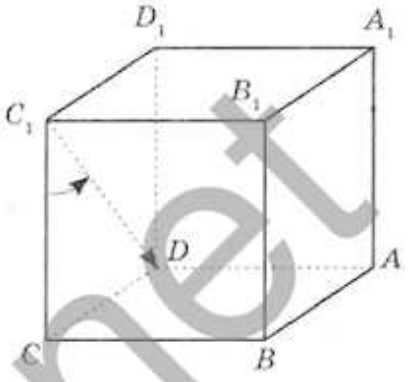
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб зі стороною 1.

Грані куба — квадрати; ребра, що виходять з однієї вершини, — взаємно перпендикулярні, діагональ грані дорівнює $\sqrt{2}$ і утворює зі стороною кут 45°, діагоналі грані утворюють кут 90°; діагональ куба дорівнює $\sqrt{3}$ і утворює з бічним ребром кут $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$; з діагоналлю грані кут $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

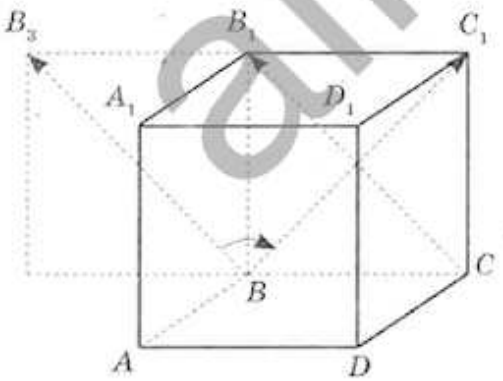
1) Оскільки $AA_1 \perp AD$, $AA_1 \perp AB$,
$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90° = 1$;
вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ утворюють ліву трійку векторів, то
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A}$; $|\overrightarrow{A_1A}| = 1$.



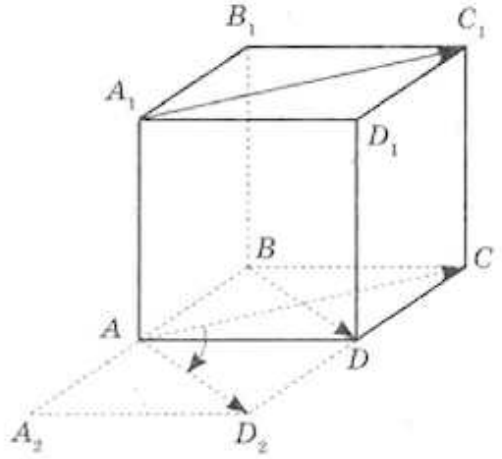
2) $CC_1 \perp C_1B_1$; $C_1D \subset (CC_1D_1)$;
$C_1B_1 \perp (CC_1D_1)$, тому $C_1D \perp C_1B_1$;
$|\overrightarrow{C_1C} \times \overrightarrow{C_1D}| = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45° = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$,
тоді $\overrightarrow{C_1C} \times \overrightarrow{C_1D} = \overrightarrow{C_1B_1}$; $|\overrightarrow{C_1B_1}| = 1$.



3) У площині (CBB_1) будуємо вектор $\overrightarrow{BB_3} = \overrightarrow{CB_1}$; $BB_3 \perp BA$; $BC_1 \perp BA$;
$|\overrightarrow{CB_1} \times \overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 90° = 2$;
вектори $\overrightarrow{BB_3}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{BA}$ утворюють ліву трійку векторів, тоді
$\overrightarrow{BB_3} \times \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = -2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB}$;
$|2\overrightarrow{AB}| = 2$.



4) $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$; у площині (ABC) будуємо вектор $\overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BD}$; $AC \perp AA_1$; $BD \perp AA_1$; $AD_2 \perp AA_1$;
$|\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD_2}| =$
$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 90° = 2$;
вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_2}$, $\overrightarrow{AA_1}$ утворюють ліву трійку векторів, тому
$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{A_1A}$;
$|2\overrightarrow{AA_1}| = 2$.

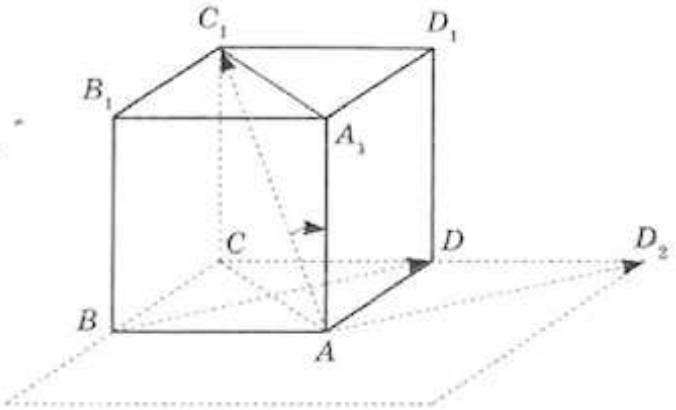


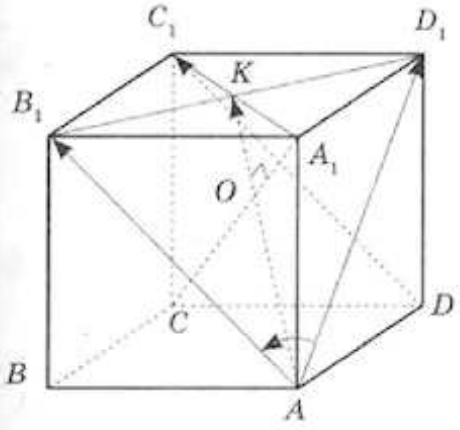
5) $\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AA_1}$; пряма, перпендикулярна до площини (AA_1C_1) (що містить вектори $\overrightarrow{AC_1}$ і $\overrightarrow{AA_1}$), — це пряма BD.

alldz.net

$\left|\overrightarrow{AC_1} \times \overrightarrow{DD_1}\right| = \left|\overrightarrow{AC_1} \times \overrightarrow{AA_1}\right| = \left|\overrightarrow{AC_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AA_1}\right| \cdot \sin \angle A_1AC_1 = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}.$

Вектори $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{AD_2}$ $\left(\overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BD};\ AD_2 \perp (AA_1C_1)\right)$ утворюють праву трійку векторів, тоді $\overrightarrow{AC_1} \times \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AC_1} \times \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BD}$; $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{2}$.





6) $\overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{AB_1}$; векторним добутком $\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{AB_1}$ є вектор, перпендикулярний до площини (AB_1D_1).

Розглянемо тетраедр $AB_1D_1A_1$:

$AA_1 = A_1B_1 = A_1D_1 = 1$;

$AB_1 = B_1D_1 = AD_1 = \sqrt{2}$.

ΔAB_1D_1 — рівносторонній, $\angle D_1AB_1 = 60°$.

За висновком задачі № 10 §8, протилежні ребра тетраедра перпендикулярні, отже, за наслідком теореми 3 §8, його вершина A_1 проектується в ортоцентр грані AB_1D_1 — точку O; $A_1O \perp AK$ (AK — висота, медіана ΔAB_1D_1).

Доведемо, що $O \in CA_1$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ як базис.

$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

Тоді $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; $\overrightarrow{CA_1} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$.

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{CA_1} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right)(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} -$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}^2 - \vec{c}\vec{b} = \vec{c}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{b}^2 = |\vec{c}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Звідси $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{CA_1}$, $AK \perp CA_1$, оскільки $A_1O \perp AK$, то $O \in CA_1$, $A_1O \perp (AB_1D_1)$, то $CA_1 \perp (AB_1D_1)$; $CA_1 \perp AD_1$, $CA_1 \perp AB_1$.

$$\left|\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{AB_1}\right| = \left|\overrightarrow{AD_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cdot \sin \angle D_1AB_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Вектори $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{CA_1}$ утворюють праву трійку векторів, тому

$\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{CA_1}$; $\left|\overrightarrow{CA_1}\right| = \sqrt{3}$.

8. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ — подвійний векторний добуток.

Оскільки $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$, $\vec{d} \times \vec{c} = \vec{p}$, то $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{p}$.

Результатом подвійного векторного добутку є вектор.

Особливого геометричного змісту не має, виражається за допомогою формули:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$; $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$.

aldz.net

ПОЯСНЕННЯ

Формули паралельного перенесення точки $M(x; y; z)$ у точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на вектор $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$: $\begin{cases} x_1 = x + a_x, \\ y_1 = y + a_y, \\ z_1 = z + a_z. \end{cases}$

Формули центральної симетрії перетворення точки $M(x; y; z)$ у точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ відносно $O(0; 0; 0)$ — початку відліку: $\begin{cases} x_1 = -x, \\ y_1 = -y, \\ z_1 = -z. \end{cases}$

Формули перетворення симетрії відносно площини xOy точки $M(x; y; z)$ у точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$: $\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y, \\ z_1 = -z. \end{cases}$

Формули перетворення повороту точки $M(x; y; z)$ у точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$:

$\begin{cases} x_1 = \sqrt{x^2 + y^2}\cos(\alpha + \varphi), \\ y_1 = \sqrt{x^2 + y^2}\sin(\alpha + \varphi), \\ z_1 = z, \end{cases}$ $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, φ — кут повороту.

Формули перетворення гомотетії з центром у початку координат точки $M(x; y; z)$ у точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$: $\begin{cases} x_1 = kx, \\ y_1 = ky, \\ z_1 = kz; \end{cases}$ $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$.

Завдання 8

1. 1) $O(0; 0; 0)$; $A(0; 0; 4)$; $C(0; 3; 0)$; $B(0; 3; 4)$.
   AB — образ відрізка OC при паралельному перенесенні на $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OA}(0; 0; 4)$.
   BC — образ відрізка OA при паралельному перенесенні на $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OC}(0; 3; 0)$.
   2) $O(0; 0; 0)$; $A(0; 0; 2)$; $C(4; 0; 0)$; $B(4; 0; 2)$. $\overrightarrow{OA}(0; 0; 2)$; $\overrightarrow{OC}(4; 0; 0)$;
   3) $O(0; 0; 0)$; $A(3; 0; 0)$; $C(0; 2; 0)$; $B(3; 2; 0)$. $\overrightarrow{OA}(3; 0; 0)$; $\overrightarrow{OC}(0; 2; 0)$;
   4) $O(0; 0; 0)$; $A(0; 2; 3)$; $C(0; 4; 0)$; $B(0; 6; 3)$. $\overrightarrow{OA}(0; 2; 3)$; $\overrightarrow{OC}(0; 4; 0)$.

2. $\bar{p}\left(1; -2; -\dfrac{3}{4}\right)$ — вектор, за допомогою якого задано паралельне перенесення.
   1) A переходить у точку A_1, тоді $\overrightarrow{AA_1} = \bar{p}$; $A(0; -1; 0)$;

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 1 = 1, \\ y_1 = -1 - 2 = -3, \\ z_1 = 0 - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{4}; \end{cases} \quad A_1\left(1; -3; -\frac{3}{4}\right).$$

   2) B_1 — образ точки $B(2; -3; 5)$, $\overrightarrow{BB_1} = \bar{p}$;

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 1 = 3, \\ y_1 = -3 - 2 = -5, \\ z_1 = 5 - \dfrac{3}{4} = 4\dfrac{1}{4}; \end{cases} \quad B_1\left(3; -5; 4\frac{1}{4}\right).$$

alldz.net

3) M' — образ точки $M(0; -1; 0)$; $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$;

$$\begin{cases} 0 = x + 1, \\ -1 = y - 2, \\ 0 = z - \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \\ z = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad M'\left(-1; 1; \frac{3}{4}\right).$$

4) H' — образ точки $H(-8; 4; 4)$; $\overrightarrow{HH'} = \vec{p}$;

$$\begin{cases} -8 = x + 1, \\ 4 = y - 2, \\ 4 = z - \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -9, \\ y = 6, \\ z = 4\frac{3}{4}; \end{cases} \quad H'\left(-9; 6; 4\frac{3}{4}\right).$$

3. A_1B_1 — образ відрізка AB при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p}$, $\vec{p} = \overrightarrow{CO}$, C — середина AB, O — початок відліку.

$O(0; 0; 0)$; $C\left(\frac{2+5}{2}; \frac{-3+5}{2}; \frac{5+1}{2}\right)$; $C(3{,}5; 1; 3)$; $\overrightarrow{CO}(-3{,}5; -1; -3)$;

Для точки A_1: $\begin{cases} x_1 = 2 - 3{,}5 = -1{,}5, \\ y_1 = -3 - 1 = -4, \\ z_1 = 5 - 3 = 2; \end{cases}$ для точки B_1: $\begin{cases} x_1 = 5 - 3{,}5 = 1{,}5, \\ y_1 = 5 - 1 = 4, \\ z_1 = 1 - 3 = -2. \end{cases}$

Отже, $A_1(-1{,}5; -4; 2)$, $B_1(1{,}5; 4; 2)$.

4. Нехай $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ — точки прямої AB; $\vec{p}(a; b; c)$ — вектор паралельного перенесення, тоді образом точки A є точка $A_1(x_1 + a; y_1 + b; z_1 + c)$, образом точки B є точка $B_1(x_2 + a; y_2 + b; z_2 + c)$. Знайдемо координати середин відрізків AB_1 і BA_1:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + a}{2}; \frac{y_1 + y_2 + b}{2}; \frac{z_1 + z_2 + c}{2}\right); \quad \left(\frac{x_2 + x_1 + a}{2}; \frac{y_2 + y_1 + b}{2}; \frac{z_2 + z_1 + c}{2}\right);$$

вони однакові, отже, середини відрізків співпадають, звідси ABB_1A_1 — паралелограм, $AB \parallel A_1B_1$; $AA_1 \parallel BB_1$.

Тобто пряма, що не паралельна $\vec{p}$ і не містить $\vec{p}$, переходить у паралельну пряму.

Якщо пряма містить $\vec{p}$ (або паралельна $\vec{p}$), то точки A_1 і B_1 також належать прямій AB, отже, AB переходить сама в себе.

$$AA_1 = \sqrt{(x_1 + a - x_1)^2 + (y_1 + b - y_1)^2 + (z_1 + c - z_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$BB_1 = \sqrt{(x_2 + a - x_2)^2 + (y_2 + b - y_2)^2 + (z_2 + c - z_2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Точки A і B переміщуються по прямій AB на одну й ту саму відстань $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Висновок: при паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну пряму або сама в себе.

5. Нехай $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ — точки, що задають деяку площину (ABC); $\vec{p}(a; b; c)$ — вектор паралельного перенесення, тоді образом точки A є точка $A_1(x_1 + a; y_1 + b; z_1 + c)$; образом точки B є точка $B_1(x_2 + a; y_2 + b; z_2 + c)$; образом точки C є точка $C_1(x_3 + a; y_3 + b; z_3 + c)$.

Використовуючи розв'язання задачі № 4 §10, маємо: ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — паралелограми, отже, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, звідси $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ (за ознакою паралельності площин).

Висновок: при паралельному перенесенні площина-образ і площина-прообраз паралельні.

6. Рівняння даної сфери: $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$, отже, $O(0; 1; -1)$ — її центр, $R = 2$. Образом сфери при паралельному перенесенні на вектор $\vec{b}(-11; 5; 13)$ буде сфера з центром $O_1(x_1; y_1; z_1)$ і $R = 2$, $\overrightarrow{OO_1} = \vec{b}$.

alg.net



За формулами: $\begin{cases} x_1 = 0 + (-11) = -11, \\ y_1 = 1 + 5 = 6, \\ z_1 = -1 + 13 = 12. \end{cases}$

Отже, $O_1(-11; 6; 12)$, а рівняння сфери: $(x + 11)^2 + (y - 6)^2 + (z - 12)^2 = 4$.

7. Рівняння сфери-образу, що отримали паралельним перенесенням даної сфери на вектор $\vec{a}(-1; 1; 3)$, с: $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$, отже, $O_1(0; -1; 1)$ — її центр, $R = 2$.

Прообразом даної сфери буде сфера з центром $O(x; y; z)$, $\overrightarrow{OO_1} = \vec{a}$ і $R = 2$.

За формулами: $\begin{cases} 0 = x - 1, \\ -1 = y + 1, \\ 1 = z + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \\ z = -2. \end{cases}$

Отже, $O(1; -2; -2)$, а рівняння сфери: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 2$.

8. Рівняння даної площини α: $3x - y + 8z - 17 = 0$, вектор паралельного перенесення $\vec{a}(-1; 5; 3)$.

Нехай α_1 — образ даної площини; $M(x; y; z) \in \alpha$, $M_1(x_1; y_1; z_1) \in \alpha_1$, $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$.

За формулами: $\begin{cases} x_1 = x - 1, \\ y_1 = y + 5, \\ z_1 = z + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_1 + 1, \\ y = y_1 - 5, \\ z = z_1 - 3. \end{cases}$

Маємо координати $M(x_1 + 1; y_1 - 5; z_1 - 3)$, тоді
$3(x_1 + 1) - (y_1 - 5) + 8(z_1 - 3) - 17 = 0$; $3x_1 + 3 - y_1 + 5 + 8z_1 - 24 - 17 = 0$;
$3x_1 - y_1 + 8z_1 - 33 = 0$.
Рівняння площини-образу: $3x - y + 8z - 33 = 0$.

9. Рівняння площини-образу α_1 після паралельного перенесення на $\vec{a}(1; -1; 2)$ деякої площини α має вигляд: $x - 2y + 3z + 1 = 0$.
Запишемо його як: $x_1 - 2y_1 + 3z + 1 = 0$.
$M(x; y; z) \in \alpha$; $M_1(x_1; y_1; z_1) \in \alpha_1$; $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$.

За формулами: $\begin{cases} x_1 = x + 1, \\ y_1 = y - 1, \\ z_1 = z + 2 \end{cases}$ маємо координати $M_1(x + 1; y - 1; z + 2)$,

тоді $(x + 1) - 2(y - 1) + 3(z + 2) + 1 = 0$; $x + 1 - 2y + 2 + 3z + 6 + 1 = 0$;
$x - 2y + 3z + 10 = 0$.
Рівняння площини-прообразу: $x - 2y + 3z + 10 = 0$.

Центром симетрії відрізка є його середина.

10. Нехай O — середина AB, тоді $O\left(\frac{1-1}{2}; \frac{2+4}{2}; \frac{-1+2}{2}\right)$; $O\left(0; 3; \frac{1}{2}\right)$.

Отже, $O\left(0; 3; \frac{1}{2}\right)$ — центр симетрії AB.

11. $M(1; 2; -3)$ — дана точка.
1) M_1 симетрична M відносно початку координат $O(0; 0; 0)$, тоді $M_1(-1; -2; 3)$.
2) M_2 симетрична M відносно точки $O_1(-1; 0; 1)$, тоді O — середина MM_2;
$M_2(x_2; y_2; z_2)$, звідси $O\left(\frac{1 + x_2}{2}; \frac{2 + y_2}{2}; \frac{-3 + z_2}{2}\right)$; $\frac{1 + x_2}{2} = -1$; $\frac{2 + y_2}{2} = 0$;

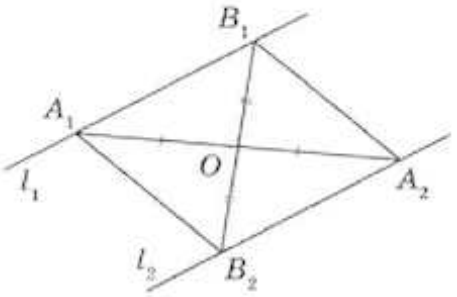
alay.net

$\frac{-3+z_2}{2}=1$; $x_2=-3$; $y_2=-2$; $z_2=5$, отже, $M_2(-3;\ -2;\ 5)$.

3) M_3 симетрична M відносно точки $P(5;\ -5;\ 4)$, тоді P — середина MM_3; $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, звідси: $P\left(\frac{1+x_2}{2};\ \frac{2+y_2}{2};\ \frac{-3+z_2}{2}\right)$; $\frac{1+x_2}{2}=5$;

$\frac{2+y_2}{2}=-5$; $\frac{-3+z_2}{2}=4$; $x_2=9$; $y_2=-12$; $z_2=11$. Отже, $M_3(9;\ -12;\ 11)$.

12. Нехай l_1 і l_2 — прямі, симетричні відносно деякої точки O, $O\notin l_1$, $O\notin l_2$.



На прямій l_1 існують точки A_1 і B_1, а на прямій l_2 існують точки A_2 і B_2 відповідно симетричні точкам A_1 і B_1, тоді O — середина відрізків A_1A_2 і B_1B_2 відповідно, звідси $A_1B_1A_2B_2$ — паралелограм, отже, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $l_1 \parallel l_2$.

Висновок: $l_1 \parallel l_2$.

13. Нехай α_1 і α_2 — площини, симетричні відносно деякої точки O, $O\notin \alpha_1$, $O\notin \alpha_2$.

На площині α_1 існують три точки A_1, B_1, C_1, а на площині α_2 точки A_2, B_2, C_2 відповідно симетричні точкам A_1, B_1, C_1, тоді O — середина відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 відповідно.

Використовуючи розв'язання задачі № 12 §10, маємо: $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$, $A_1C_1A_2C_2$ — паралелограми, отже, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, звідси $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ (за ознакою паралельності площин).

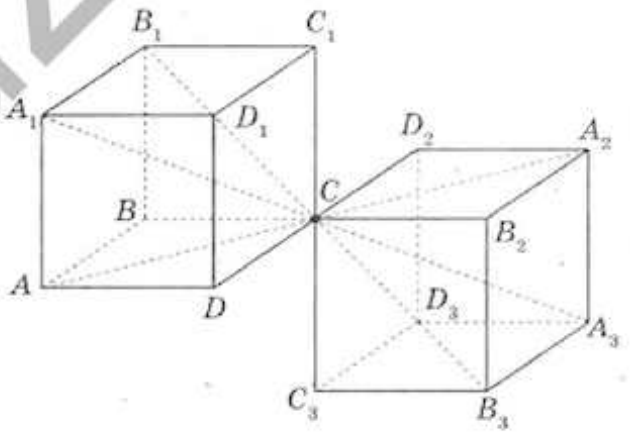
Висновок: $\alpha_1 \parallel \alpha_2$.

14. Оскільки центр симетрії є рівновіддаленим від фігур F і F_1, то ГМТ центрів симетрії двох даних паралельних площин є площина, паралельна даним площинам і рівновіддалена від них.

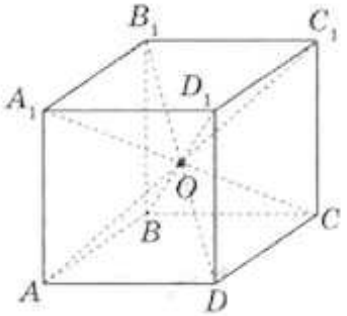
15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

1) Куб $A_2B_2CD_2A_3B_3C_3D_3$ симетричний даному відносно вершини C.

$AC = A_2C$, $BC = B_2C$ тощо.

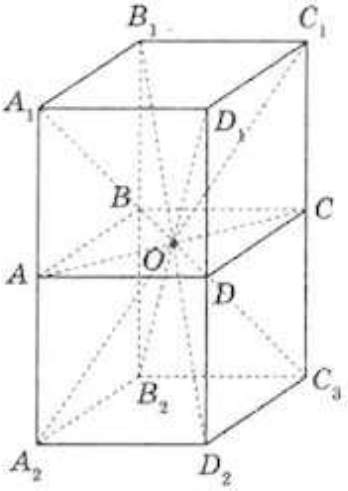


2) Точка перетину діагоналей куба рівновіддалена від усіх його вершин і є центром симетрії куба, отже, куб переходить сам у себе; $B_1O = DO$; $A_1O = CO$ тощо.

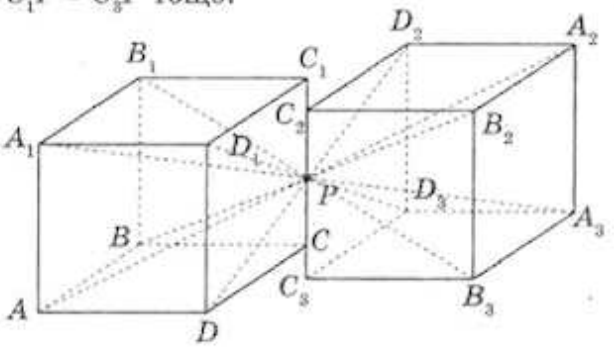


aldz.net

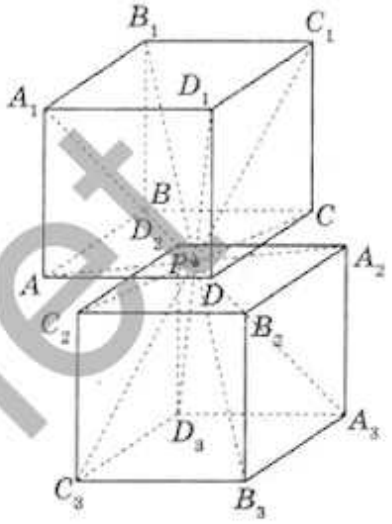
3) Куб $ABCDA_1B_1A_2B_2$ — симетричний даному відносно точки O — точки перетину діагоналей квадрата $ABCD$; $A_1O = C_2O$; $B_1O = D_2O$; $C_1O = A_2O$; $D_1O = B_2O$; $AO = CO$; $BO = DO$ ($ABCD$ — спільна грань).



4) Куб $A_2B_2C_2D_2A_3B_3C_3D_3$ — симетричний даному відносно точки P, $P \in C_1C$; $CP = PC_1$; $C_1P = C_3P$ тощо.



5) Куб $A_2B_2C_2D_2A_3B_3C_3D_3$ симетричний даному відносно точки P, $P \in (ABC)$, $(ABC) = (A_2B_2C_2)$; $BP = DP$; $AP = CP$ тощо.



16. Рівняння даної площини α: $x + y + z - 3 = 0$.

α_1 — образ даної площини при симетрії відносно точки:

1) $P(2; 2; 2)$ — центр симетрії. $2 + 2 + 2 - 3 \neq 0$, $P \notin \alpha$, тоді рівняння α: $x + y + z + n = 0$.

У площині α існує точка $A(1; 1; 1)$; в площині α_1 існує точка $A_1(x_1; y_1; z_1)$ симетрична A відносно точки P, тоді P середина AA_1:

$$P\left(\frac{1+x_1}{2}; \frac{1+y_1}{2}; \frac{1+z_1}{2}\right); \quad \frac{1+x_1}{2} = 2; \quad \frac{1+y_1}{2} = 2; \quad \frac{1+z_1}{2} = 2;$$

$x_1 = 3$; $y_1 = 3$; $z_1 = 3$; $A_1(3; 3; 3)$. α_1: $3 + 3 + 3 + n = 0$; $n = -9$.

Отже, рівняння α_1: $x + y + z - 9 = 0$.

2) $O(0; 0; 0)$ — центр симетрії.

За прикладом № 4 §10 рівняння α_1: $x + y + z + 3 = 0$.

3) $H(1; -1; 2)$ — центр симетрії.

$1 - 1 + 2 - 3 \neq 0$; $H \notin \alpha$, рівняння α_1: $x + y + z + n = 0$.

Аналогічно п. 1: $$P\left(\frac{1+x_1}{2}; \frac{1+y_1}{2}; \frac{1+z_1}{2}\right); \quad \frac{1+x_1}{2} = 1; \quad \frac{1+y_1}{2} = -1; \quad \frac{1+z_1}{2} = 2;$$

$x_1 = 1$; $y_1 = -3$; $z_1 = 3$.

$A_1(1; -3; 3)$. α_1: $1 - 3 + 3 + n = 0$; $n = -1$.

Отже, рівняння α_1: $x + y + z - 1 = 0$.

17. Дані площини α_1: $x + y + z - 3 = 0$ і α_2: $x + y + z - 9 = 0$.

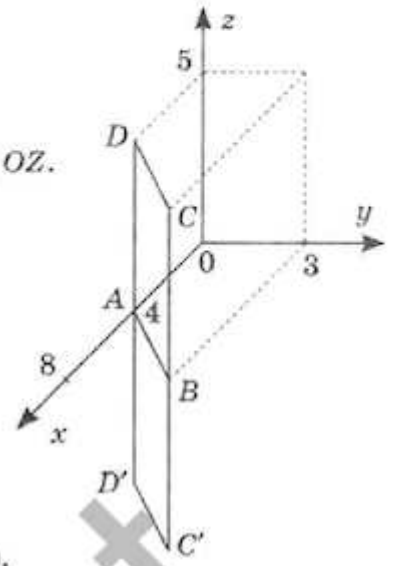
За висновком задачі № 14 §10, дві паралельні площини мають безліч центрів симетрії, ГМТ яких є площина, паралельна даним, причому α_3: $x + y + z + n = 0$, де $n = \dfrac{-3 + (-9)}{2} = -6$.

alg7.net

Отже, α_3: $x + y + z - 6 = 0$ — площина, що становить ГМТ центрів симетрії α_1 і α_2.

Їй належать точки $A(2; 2; 2)$, $B(0; 0; 6)$ тощо.

18. $ABCD$ — квадрат; $A(4; 0; 0)$, $B(8; 3; 0)$; $(ABC) \parallel Oz$.



Нехай образом даного квадрата є квадрат $A_1B_1C_1D_1$, що симетричний даному відносно точки $P(2; 2; 2)$.

Знайдемо інші вершини квадрата $ABCD$.

Оскільки $AB \subset (XOY)$, $(ABC) \parallel OZ$, то $AD \perp AB$, $AD \parallel OZ$.

$|AB| = \sqrt{(8-4)^2 + (3-0)^2 + 0^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$,

тоді $D(4; 0; 5)$ або $D'(4; 0; -5)$; $C(8; 3; 5)$ або $C'(8; 3; -5)$.

Якщо P — центр симетрії, то P — середина відповідних відрізків AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

Для квадрата $ABCD$:

$A(4; 0; 0)$, $A_1(x; y; z)$; $P\left(\frac{4+x}{2}; \frac{0+y}{2}; \frac{0+z}{2}\right)$;

$\frac{4+x}{2} = 2$; $\frac{y}{2} = 2$; $\frac{z}{2} = 2$; $x = 0$; $y = 4$; $z = 4$; $A(0; 4; 4)$.

$B(8; 3; 0)$, $B_1(x; y; z)$; $P\left(\frac{8+x}{2}; \frac{3+y}{2}; \frac{0+z}{2}\right)$; $\frac{8+x}{2} = 2$; $\frac{3+y}{2} = 2$; $\frac{z}{2} = 2$;

$x = -4$; $y = 1$; $z = 4$; $B_1(-4; 1; 4)$.

$C(8; 3; 5)$, $C_1(x; y; z)$; $P\left(\frac{8+x}{2}; \frac{3+y}{2}; \frac{5+z}{2}\right)$; $\frac{8+x}{2} = 2$; $\frac{3+y}{2} = 2$; $\frac{5+z}{2} = 2$;

$x = -4$; $y = 1$; $z = -1$; $C_1(-4; 1; -1)$.

$D(4; 0; 5)$, $D_1(x; y; z)$; $P\left(\frac{4+x}{2}; \frac{0+y}{2}; \frac{5+z}{2}\right)$; $\frac{4+x}{2} = 2$; $\frac{y}{2} = 2$; $\frac{5+z}{2} = 2$;

$x = 0$; $y = 4$; $z = -1$; $D_1(0; 4; -1)$.

Для квадрата $ABC'D'$:

$C'(8; 3; -5)$; $C_1'(x; y; z)$; $P\left(\frac{8+x}{2}; \frac{3+y}{2}; \frac{-5+z}{2}\right)$; $x = -4$; $y = 1$; $\frac{-5+z}{2} = 2$;

$z = 9$; $C_1'(-4; 1; 9)$.

$D'(4; 0; -5)$; $D_1'(x; y; z)$; $P\left(\frac{4+x}{2}; \frac{0+y}{2}; \frac{-5+z}{2}\right)$; $x = 0$; $y = 4$; $z = 9$; $D'(0; 4; 9)$.

Отже, задача має два розв'язки:

для квадрата $ABCD$ симетричним є $A_1B_1C_1D_1$; для квадрата $ABC'D'$ симетричним є $A_1B_1C_1'D_1'$.

19. 1) Завжди існує площина, що проходить через середину деякого відрізка, перпендикулярного йому, тоді кінці відрізка є симетричними відносно даної площини.

2) Площина, симетрична двом мимобіжним прямим, не існує, бо для кожної точки однієї з прямих не існує відповідно симетричної точки іншої прямої.

3) Завжди існує площина, симетрична іншій площині відносно деякої площини.

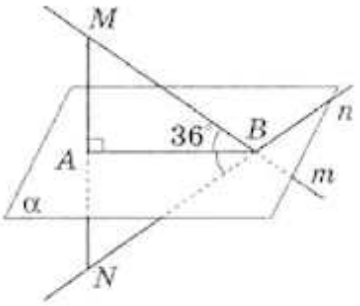
Якщо дані площини паралельні, то площина симетрії є паралельною даним і рівновіддаленою від них.

Якщо дані площини перетинаються, то площина симетрії проходить через пряму перетину даних площин і кожна її точка є рівновіддаленою від даних площин.

ald.net

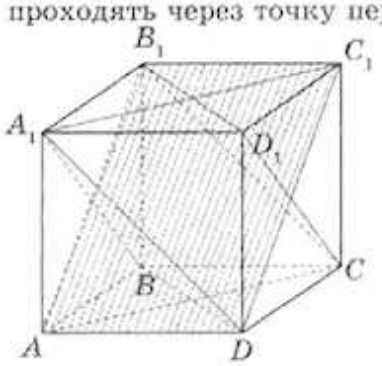
20. Ні (див. розв'язання задач № 19 (3) §10).

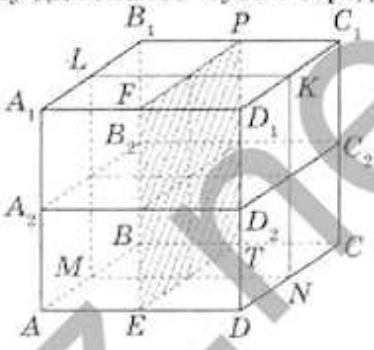
22. m — деяка пряма, α — деяка площина; $\angle(m; \alpha) = 36°$. Пряма n симетрична m відносно α. На прямій m оберемо деяку точку M, опустимо перпендикуляр MA на площину α, точку перетину m і α позначимо B. Тоді MB — похила, AB — проекція, $\angle(m; \alpha) = \angle MBA = 36°$. Причому $(MAB) \perp \alpha$. Оскільки пряма n симетрична m відносно α, то кожний з відрізків MN ($M \in m$, $N \in n$) перпендикулярний до α і поділяється нею навпіл, отже,



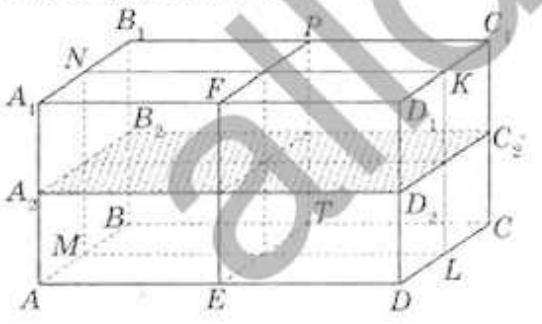
$n \subset (MAB)$, $N \in n$, причому $MA = AN$; $MN \perp \alpha$, A — середина MN, n перетинає α в точці B. Тоді в ΔMBN: BA — висота і медіана, отже, трикутник рівнобедрений, $MB = NB$, BA — бісектриса, $\angle MBA = \angle NBA = 36°$.
Оскільки $NA \perp \alpha$, NB — похила, BA — проекція, то $\angle NBA = \angle(n; \alpha)$, тоді $\angle(n; m) = \angle NBM = 36° \cdot 2 = 72°$; $\angle(n; \alpha) = \angle NBA = 36°$.
Отже: 1) 72°; 2) 36°.

23. 1) Площини симетрії куба: всі діагональні перерізи та перерізи площинами, що проходять через точку перетину діагоналей куба і середини відповідних ребер.

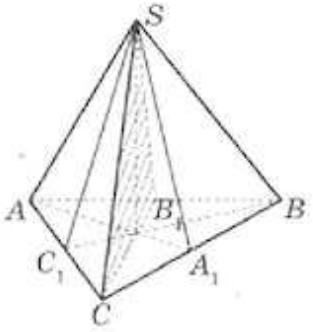




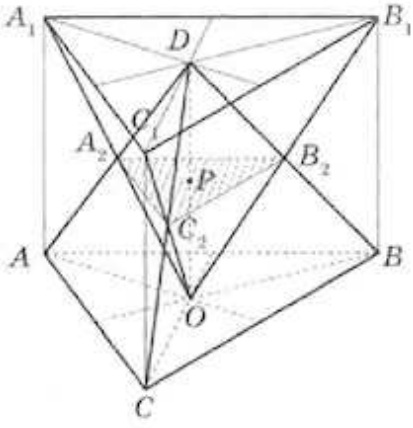
2) Площини симетрії прямокутного паралелепіпеда проходять через точку перетину діагоналей куба та середини відповідних ребер.



3) Площини симетрії правильної трикутної піраміди проходять через бічні ребра і висоти протилежних бічних граней.



24. Нехай $ABCD$ — зображення даного правильного тетраедра, ΔABC — рівносторонній, DO — висота, де точка O — точка перетину медіан ΔABC. Позначимо P — середина DO. Оскільки січна площина проходить через точку P перпендикулярно до DO, то ця площина паралельна площині (ABC), отже, перетинає грані DAB, DBC і DAC по прямим, паралельним до AB, BC, AC відповідно: A_2B_2, B_2C_2, A_2C_2, причому відрізки A_2B_2, B_2C_2 і A_2C_2 є середніми лініями ΔDAB, ΔDBC, ΔDAC.

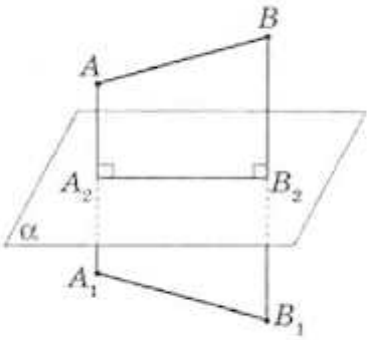


all2.net

Вершини тетраедра, симетричного даному відносно січної площини, точки A_1, B_1, C_1 належать площині, що паралельна $(A_2B_2C_2)$, перпендикулярна до DO, $D \in (A_1B_1C_1)$, причому відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 поділяються січною площиною навпіл, тобто точка D переходить у точку O, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DO$, отже, $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна призма, а $A_1B_1C_1O$ — тетраедр, симетричний даному відносно $(A_2B_2C_2)$.

25. Нехай AB — даний відрізок, α — площина симетрії, A_1B_1 — відрізок, симетричний даному відносно α, тоді $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, тоді $AA_1 \parallel BB_1$, A_2 і B_2 — точки перетину AA_1 і BB_1 з α відповідно. За властивістю симетрії відносно площини: $AA_2 = A_1A_2$; $BB_2 = B_1B_2$, тоді ABB_1A_1 — рівнобічна трапеція з основами AA_1 і BB_1.

У випадку: $AB \parallel \alpha$, $AB \perp AA_1$, тоді ABB_1A_1 — прямокутник.



26. Нехай дана площина α: $x - 2y + z - 3 = 0$.

1) $O(0; 0; 0)$ — дана точка; $O_1(x; y; z)$ — симетрична даній відносно α.

Вектор-нормаль даної площини $\vec{n}(1; -2; 1)$, відповідний шуканій точці O_1 радіус-вектор колінеарний до $\vec{n}$, отже, $O_1(a; -2a; a)$.

Оскільки точки $O(0; 0; 0)$ і $O_1(a; -2a; a)$ рівновіддалені від площини $x - 2y + z - 3 = 0$, то

$$d((0; 0; 0); x - 2y + z - 3 = 0) = \frac{|1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

$$d((a; -2a; a); x - 2y + z - 3 = 0) = \frac{|1 \cdot a + (-2) \cdot (-2a) + 1 \cdot a - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|6a - 3|}{\sqrt{6}}.$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{|6a - 3|}{\sqrt{6}};\ |6a - 3| = 3;\ \left[\begin{array}{l} 6a - 3 = 3, \\ 6a - 3 = -3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 6a = 6, \\ 6a = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 0. \end{array}\right.$$

При $a = 0$ маємо $O_1(0; 0; 0)$; при $a = 1$: $O_1(1; -2; 1)$. Отже, $O_1(1; -2; 1)$.

2) $A(1; 1; 1)$ — дана точка; $A_1(x_1; y_1; z_1)$ — симетрична даній відносно α.

$\vec{n}(1; -2; 1)$ (п. 1); $AA_1 \perp \alpha$. Нехай $P(x; y; z)$ — середина відрізка AA_1, тоді $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA_1}$; $\overrightarrow{AP} \perp \alpha$, отже, $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{n}$, $P \in \alpha$.

$\overrightarrow{AP}(x - 1; y - 1; z - 1)$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ — умова колінеарності $\overrightarrow{AP}$ і $\vec{n}$.

Розв'яжемо систему:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}, \\ x - 2y + z - 3 = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x = z, \\ -2x + 2 = y - 1, \\ x - 2y + z - 3 = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} z = x, \\ y = -2x + 3, \\ x - 2(-2x + 3) + x - 3 = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x = 1{,}5, \\ z = 1{,}5, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Отже, $P(1{,}5; 0; 1{,}5)$; $\overrightarrow{AP}(0{,}5; -1; 0{,}5)$; $\overrightarrow{PA_1}(x_1 - 1{,}5; y_1 - 0; z_1 - 1{,}5)$;

$x_1 - 1{,}5 = 0{,}5$; $x_1 = 2$; $y_1 = -1$; $z_1 - 1{,}5 = 0{,}5$; $z_1 = 2$.

Отже, $A_1(2; -1; 2)$ — точка, симетрична даній відносно α.

3) $B(-1; 0; 1)$ — дана точка, $B_1(x_1; y_1; z_1)$ — симетрична даній відносно α.

Аналогічно п. 2: $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PB_1}$; $P \in \alpha$; $\vec{n}(1; -2; 1)$.

$\overrightarrow{BP}(x + 1; y; z - 1)$; $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ — умова колінеарності $\overrightarrow{BP}$ і $\vec{n}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{1}, \\ x - 2y + z - 3 = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x + 1 = z - 1, \\ -2x - 2 = y, \\ x - 2y + z - 3 = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} z = x + 2, \\ y = -2x - 2, \\ x - 2(-2x - 2) + x + 2 - 3 = 0; \end{array}\right.$$

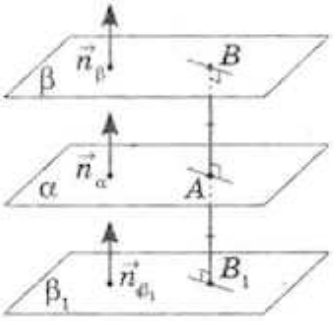
alg.net

$$\begin{cases} x = -0,5, \\ y = -1, \\ z = 1,5. \end{cases}$$

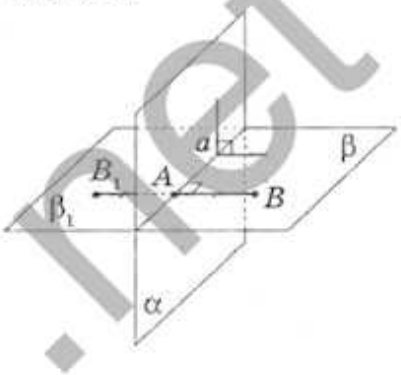
Отже, $P(-0,5;\ -1;\ 1,5)$; $\overrightarrow{BP}(0,5;\ -1;\ 0,5)$; $\overrightarrow{PB_1}(x_1 + 0,5;\ y_1 + 1;\ z_1 - 1,5)$;
$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PB_1}$;
$x_1 + 0,5 = 0,5$; $x_1 = 0$; $y_1 + 1 = -1$; $y_1 = -2$; $z_1 - 1,5 = 0,5$; $z_1 = 2$.
Отже, $B_1(0;\ -2;\ 2)$ — точка, симетрична даній відносно α.

27. β — дана площина, α — площина симетрії; β_1 — площина, що симетрична β відносно α, отже, існують такі три точки B, B_1 і A, що відповідають умовам. $B \in \beta$, $B_1 \in \beta_1$; $A \in \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, A — середина BB_1.

1) Якщо $\beta \parallel \alpha$, а $BB_1 \perp \alpha$, то $BB_1 \perp \beta$.
Тоді $\overrightarrow{BB_1} \parallel \vec{n}_\beta \parallel \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_{\beta_1}$, де $\vec{n}_\beta$, $\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_{\beta_1}$ — вектори-нормалі до даних площин, тобто $BB_1 \perp \beta_1$, отже, $\beta_1 \parallel \beta$, $\beta_1 \parallel \alpha$.

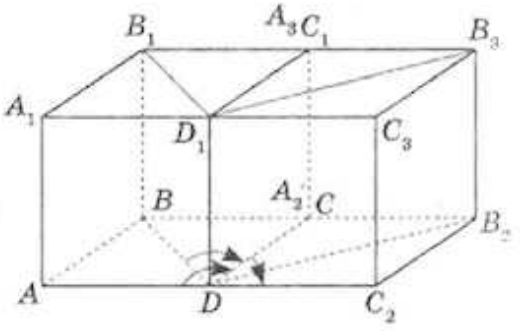


2) Якщо $\beta \perp \alpha$, a — пряма перетину, то $BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp a$, тоді $A \in a$, $A \in \beta$, тому $BB_1 \subset \beta$.
Оскільки $\beta \perp \alpha$, то $\beta_1 \perp \alpha$, отже, $\beta \parallel \beta_1$, але $B_1 \in \beta$, $B_1 \in \beta_1$, тоді β і β_1 — співпадають.



28. 1) Довільна трикутна призма — ні, правильна трикутна призма — так (пряма, що проходить через центри її основ).
2) Довільний тетраедр — ні.
3) Правильний тетраедр — так (пряма, що проходить через вершину і центр основи).
4) Довільна піраміда — ні.
5) Правильна піраміда — так (пряма, що проходить через вершину і центр основи).

29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний куб. При повороті на 90° за годинниковою стрілкою навколо ребра DD_1 точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 переходять у точки A_2 (C), B_2, C_2, D, A_3 (C_1), B_3, C_3, D_1 (D і D_1 переходять самі в себе; DD_1C_1C — спільна грань). $CB_2C_2DC_1B_3C_3D_1$ — образ даного куба. Об'єднанням кубів буде прямокутний паралелепіпед $ABB_2C_2A_1B_1B_3C_3$ — має 6 граней.

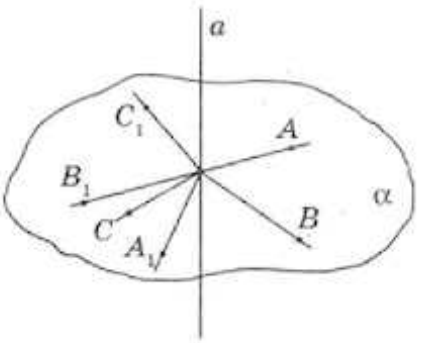


30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний куб. При повороті на 120° навколо прямої, що містить діагональ куба, даний куб перетворюється сам на себе, бо куб має поворотну симетрію, а діагональ куба є поворотною віссю симетрії $\left(\frac{360°}{120°} = 3\right)$ 3-го порядку.
Утворена фігура має 6 граней.

aidz.net

31. Нехай A, B, C — деякі точки площини α, $\alpha \perp a$, a — вісь повороту, O — точка перетину α і a. При повороті A, B, C — переходять у точки A_1, B_1, C_1, які належать площині α, отже, $(ABC) = (A_1B_1C_1)$, тобто площина α переходить сама в себе.

Висновок: площина, перпендикулярна до осі повороту, перетворенням повороту відображається на себе, а отже, площини граней фігури, які перпендикулярні до осі повороту, перетворенням відображаються на себе.

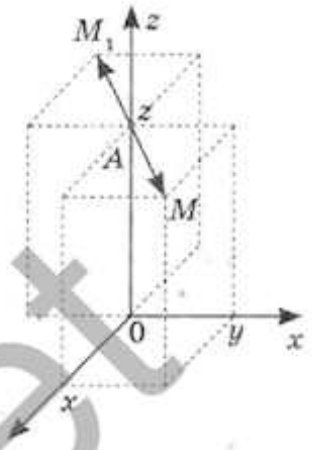


32. Нехай $M(x; y; z)$ і $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — точки, симетричні відносно осі аплікат (Oz), тоді $MM_1 \perp Oz$, отже, $MM_1 \parallel (xOy)$, $z = z_1$. Нехай точка A — точка перетину MM_1 і Oz, A — середина MM_1; $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AM_1}$;

$A(0; 0; z)$; $\overrightarrow{AM}(x - 0; y - 0; z - z)$; $\overrightarrow{AM}(x; y; 0)$;

$\overrightarrow{AM_1}(x_1 - 0; y_1 - 0; z_1 - z)$; $\overrightarrow{AM_1}(x_1; y_1; 0)$;

$$\begin{cases} x = -x_1, \\ y = -_1 y, \\ z = z_1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 = -x, \\ y_1 = -y, \\ z_2 = z \end{cases}$$ — формули симетрії відносно осі аплікат (змінюються на протилежні абсциса і ордината точки, апліката є сталою).



Той же результат отримаємо, якщо виконаємо поворот точки M навколо Oz на $180°$ у площині, паралельній (xOy).

33. Дана сфера задана рівнянням:

$(x + 1)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 + z^2 = 4$, тобто її центр $Q\left(-1; \sqrt{3}; 0\right)$ і $R = 2$.

Віссю повороту є Oz, тоді центр даної сфери перетворюється поворотом на $60°$ відносно Oz у точку $Q_1(x_1; y_1; z_1)$, де

$$x_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\alpha + \varphi) = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \cdot \cos(\alpha + 60°) = \sqrt{4}\cos(\alpha + 60°) =$$

$$= 2\cos(\alpha + 60°);$$

$$y_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi) = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \cdot \sin(\alpha + 60°) = 2\sin(\alpha + 60°);$$

$z_1 = z = 0$; $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -60°$. Маємо: $x_1 = 2\cos(-60° + 60°) = 2\cos 0° = 2 \cdot 1 = 2$;

$y_1 = 2\sin(-60° + 60°) = 2\sin 0° = 2 \cdot 0 = 0$. $z_1 = 0$; $Q_1(2; 0; 0)$.

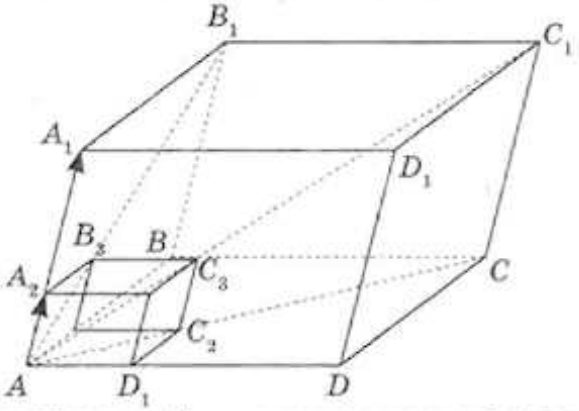
Отже, образом даної сфери буде сфера $R = 2$, рівняння якої: $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, A — центр гомотетії, $k = \dfrac{1}{3}$,

$AB_2C_2D_2A_2B_3C_3D_3$ — образ даного паралелепіпеда.

Оскільки при гомотетії величини кутів не змінюються, а довжини відрізків зменшуються в 3 рази,

$\overrightarrow{AA_2} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$, то $S_2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot S_1 = \dfrac{1}{9}S_1$,



де S_1 — площа поверхні даного паралелепіпеда, а S_2 — площа поверхні образу; $\dfrac{S_1}{S_2} = 9$.

alex.net

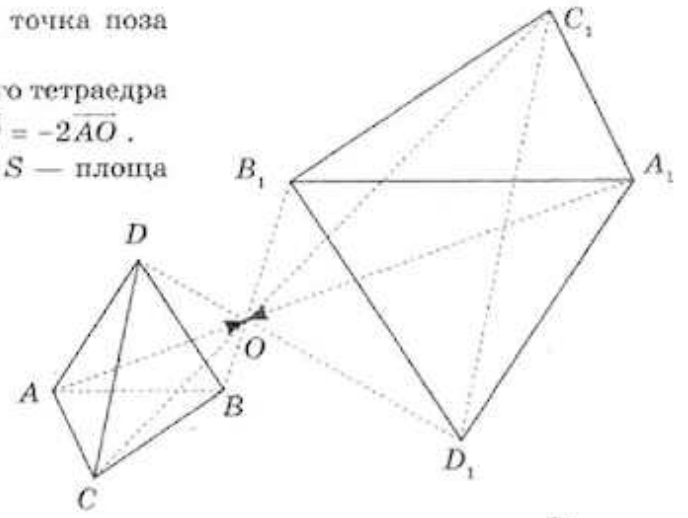
35. $ABCD$ — даний тетраедр, O — точка поза ним — центр гомотетії.

1) $k = -2$; $A_1B_1C_1D_1$ — образ даного тетраедра при гомотетії з центром O; $\overrightarrow{A_1O} = -2\overrightarrow{AO}$.

S_1 — площа поверхні $A_1B_1C_1D_1$, S — площа поверхні $ABCD$.

$S_1 = k^2S$, $S_1 = (-2)^2 \cdot S = 4S$;

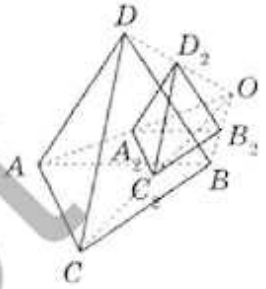
$\frac{S}{S_1} = \frac{1}{4}$.



2) $k = 0{,}5$; $A_2B_2C_2D_2$ — образ даного тетраедра при гомотетії з центром O; $\overrightarrow{A_2O} = 0{,}5\overrightarrow{AO}$.

S_2 — площа поверхні $A_2B_2C_2D_2$; $S_2 = k^2S$;

$S_2 = 0{,}5^2 \cdot S = \frac{1}{4}S$; $\frac{S}{S_2} = 4$.



У задачах 36 і 37 треба виконати композицію перетворень — послідовне виконання: паралельне перенесення; гомотетія; обернене паралельне перенесення.

36. Дана сфера задана рівнянням: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$, центр якої $Q(-1; 2; 3)$ і $R = 3$. Образом цієї сфери при гомотетії з $k = 1{,}2$ буде сфера з центром Q_1 і $R_1 = kR$; $R_1 = 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6$.

1) $O(0; 0; 0)$ — центр гомотетії. Цим перетворенням точка $Q(-1; 2; 3)$ перетворюється в точку $Q_1(-1{,}2; 2{,}4; 3{,}6)$ (за формулами гомотетії). Тоді рівняння сфери-образу: $(x + 1{,}2)^2 + (y - 2{,}4)^2 + (z - 3{,}6)^2 = 3{,}6^2$.

2) $O_1(1; 1; 1)$ — центр гомотетії. Паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}(-1; -1; -1)$ відобразимо центр гомотетії у початок координат. Тоді центр даної сфери $Q(-1; 2; 3)$ відображається в точку $Q'(x; y; z)$;

$\overrightarrow{QQ'} = \vec{a}$; $(x + 1; y - 2; z - 3) = (-1; -1; -1)$; $x = -2$; $y = 1$; $z = 2$. $Q'(-2; 1; 2)$.

Перетворення гомотетії відображає точку Q' в точку Q_1'.

$Q_1'(-2 \cdot 1{,}2; 1 \cdot 1{,}2; 2 \cdot 1{,}2)$; $Q_1'(-2{,}4; 1{,}2; 2{,}4)$.

Виконаємо обернене паралельне перенесення:

$\overrightarrow{Q_1'Q_1} = -\vec{a} = (1; 1; 1)$; $(x + 2{,}4; x - 1{,}2; x - 2{,}4) = (1; 1; 1)$; $x + 2{,}4 = 1$; $x = -1{,}4$; $x - 1{,}2 = 1$; $x = 2{,}2$; $x - 2{,}4 = 1$; $x = 3{,}4$.

Отже, $Q_1(-1{,}4; 2{,}2; 3{,}4)$ — центр сфери-образу, рівняння якої: $(x + 1{,}4)^2 + (y - 2{,}2)^2 + (z - 3{,}4)^2 = 3{,}6^2$.

3) $Q(-1; 2; 3)$ — центр гомотетії і центр сфери, отже, змінюється тільки радіус сфери, тому рівняння сфери-образу: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 3{,}6^2$ (центр сфери переходить сам у себе).

37. Рівняння даної площини α: $x - 2y + z - 3 = 0$; коефіцієнт гомотетії $k = -0{,}5$.

1) Центр гомотетії $O(0; 0; 0)$, рівняння площини-образу відрізняється від рівняння даної площини тільки вільним членом: $d_1 = kd$; $d_1 = -0{,}5 \cdot (-3) = 1{,}5$, отже, рівняння площини-образу: $x - 2y + z + 1{,}5 = 0$.

2) Центр гомотетії $A(0; -2; 1)$ паралельним перенесенням відобразимо у початок відліку: $\overrightarrow{AO} = \vec{a}(0; 2; -1)$.

alex-net

Рівняння площини-образу відносно $O(0; 0; 0)$: $x - 2y + z + 1{,}5 = 0$ (п. 1).
Виконаємо обернене паралельне перенесення площини-образу на вектор $\overrightarrow{OA}(0; -2; 1) = -\vec{a}$.

Нехай β_1 — образ нової площини β $(x - 2y + z + 1{,}5 = 0)$.
$M(x; y; z) \in \beta$, $M_1(x_1; y_1; z_1) \in \beta_1$; $\overrightarrow{MM_1} = -\vec{a} = (0; -2; 1)$.

За формулами: $\begin{cases} x_1 = x + 0, \\ y_1 = y - 2, \\ z_1 = z + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_1, \\ y = y_1 + 2, \\ z = z_1 - 1. \end{cases}$

$M(x_1; y_1 + 2; z_1 - 1)$, тоді $x_1 - 2(y_1 + 2) + (z_1 - 1) + 1{,}5 = 0$;
$x_1 - 2y_1 - 4 + z_1 - 1 + 1{,}5 = 0$; $x_1 - 2y_1 + z_1 - 3{,}5 = 0$.
Отже, рівняння шуканої площини: $x - 2y + z - 3{,}5 = 0$.

3) Точка $B(-4; 3; 2)$ — центр гомотетії; за допомогою паралельного перенесення відобразимо її у початок відліку: $\overrightarrow{BO} = \vec{a}(4; -3; -2)$.
Рівняння площини-образу відносно $O(0; 0; 0)$: $x - 2y + z + 1{,}5 = 0$ (п. 1).
Виконаємо обернене паралельне перенесення площини-образу на вектор $\overrightarrow{OB} = -\vec{a}(-4; 3; 2)$.
Нехай β_1 — образ нової площини β $(x - 2y + z + 1{,}5 = 0)$.
$M(x; y; z) \in \beta$; $M_1(x_1; y_1; z_1) \in \beta_1$; $\overrightarrow{MM_1} = -\vec{a}(-4; 3; 2)$.

За формулами: $\begin{cases} x_1 = x - 4, \\ y_1 = y + 3, \\ z_1 = z + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_1 + 4, \\ y = y_1 - 3, \\ z = z_1 - 2. \end{cases}$

$M(x_1 + 4; y_1 - 3; z_1 - 2)$, тоді $(x_1 + 4) - 2(y_1 - 3) + (z_1 - 2) + 1{,}5 = 0$;
$x_1 + 4 - 2y_1 + 6 + z_1 - 2 + 1{,}5 = 0$; $x_1 - 2y_1 + z_1 + 9{,}5 = 0$.
Отже, рівняння шуканої площини: $x - 2y + z + 9{,}5 = 0$.

aldz.net

РОЗДІЛ 2. БАГАТОГРАННІ КУТИ

§11. Двогранні кути

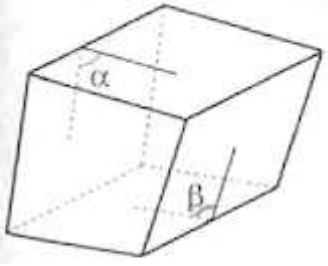
Якщо в одній грані двогранного кута міри φ провести пряму a, яка утворює кут δ з ребром цього кута, то кут γ між прямою a і другою гранню двогранного кута визначається співвідношенням: $\sin\gamma = \sin\varphi \cdot \sin\delta$.

Завдання 9

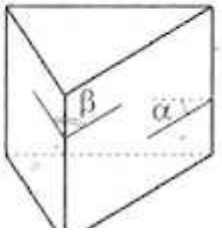
1. Приклад двогранного кута: у кімнаті стіна та стеля, які є гранями двогранного кута, лінія перетину — ребро цього кута, лінії перетину зі спільною іншою стіною — лінійний кут.

2. α і β — дані двогранні кути.

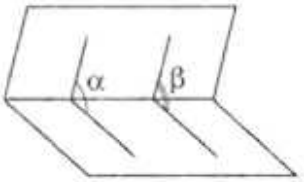
1) Чотирикутна призма;



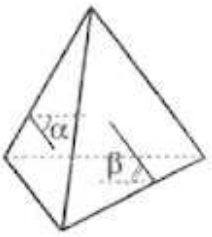
2) трикутна призма (одна грань спільна);



3) двогранний кут (кути співпадають);



4) тетраедр.



3. 1) 30°; 2) 24°; 3) 90°; 4) α, так.

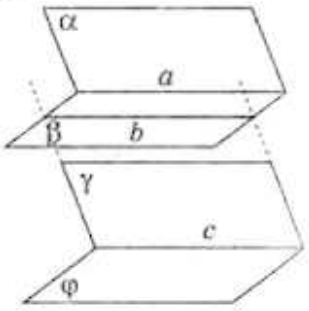
4. 1) Якщо $ABCP$ і $PCHM$ — квадрати, то $BC \perp PC$, $HC \perp PC$ (PC — ребро двогранного кута), тоді $OQ \perp PC$, $OQ \parallel BC$, $OF \perp PC$, $OF \parallel HC$, $HC \parallel PM$, $OF \parallel PM$ — суперечить малюнку. Отже, на малюнку помилка.

5. 1) Якщо $ABCP$ і $PCHM$ — квадрати, Q і H — середини AB і HM відповідно, O — середина PC, то $OQ \perp PC$, $FO \perp PC$, отже, $\angle QOF$ — лінійний кут двогранного кута з ребром PC.

2) Якщо $ABCP$ і $PCHM$ — ромби, то $OQ \parallel BC$, $OF \parallel CH$, але $BC \not\perp PC$, $HC \not\perp PC$, тому $OQ \not\perp OC$, $FO \not\perp OC$, отже, на малюнку помилка.

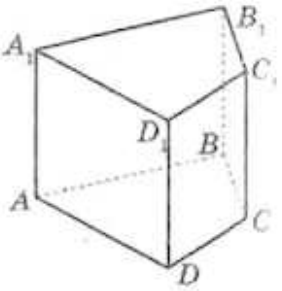
Якщо дві паралельні площини перетнуті третьою, то прямі перетину паралельні між собою.
Дві прямі, що паралельні до третьої, паралельні між собою.

6. Нехай дані двогранні кути утворені півплощинами α і β, γ і φ, відповідні ребра яких a і c. За умовою $\alpha \parallel \gamma$, $\beta \parallel \varphi$.
Нехай b — пряма перетину γ і β.
Маємо: β перетинає α по прямій a; β перетинає γ по прямій b; $\alpha \parallel \gamma$ (за умовою), тоді $a \parallel b$.
Аналогічно: γ перетинає β по прямій b; γ перетинає φ по прямій c; $\beta \parallel \varphi$ (за умовою), тоді $b \parallel c$.
Оскільки $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
Висновок: якщо грані двох двогранних кутів паралельні, то і ребра їх паралельні.

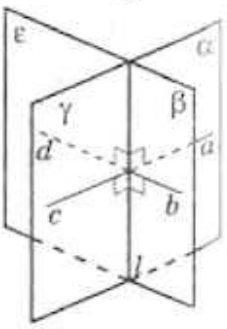


Дві площини перетинаються тільки по одній прямій, а через одну пряму проходить безліч площин.

7. Ні. Розглянемо чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основою якої є довільний чотирикутник $ABCD$.
Бічні грані DAA_1D_1 і BAA_1B_1 утворюють двогранний кут з ребром AA_1, грані DD_1C_1C і BB_1C_1C — двогранний кут з ребром CC_1. За властивістю призми $AA_1 \parallel CC_1$, але $(ADD_1) \not\parallel (BCC_1)$, $(CDD_1) \not\parallel (ABB_1)$.



8. Якщо грані двох двогранних кутів відповідно паралельні, то ребра цих кутів також паралельні. Сумістимо ці прямі за допомогою паралельного перенесення і побудуємо лінійні кути даних двогранних кутів. Лінійні кути утворюють вертикальні або суміжні кути, отже, вони рівні, бо в сумі становлять 180°, а отже, дані двогранні кути рівні, або в сумі становлять 180° ($\angle(ab) = \angle(cd)$; $\angle(ab) + \angle(bc) = 180°$).



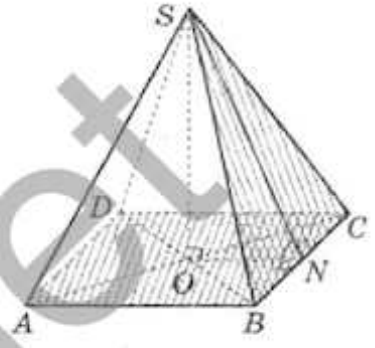
alloz.net

9. 1) $\angle 1 = \angle BAB_1$ — лінійний кут двогранного кута з ребром AD, грані якого: (ABC) і (AB_1C_1) ($BA \perp AD$; $B_1A \perp AD$ за властивістю прямокутного паралелепіпеда).
2) $\angle 3 = \angle ABD$ — лінійний кут двогранного кута з ребром BB_1, грані якого (ABB_1) і (DBB_1) ($AB \perp BB_1$; $DB \perp BB_1$ за властивістю прямокутного паралелепіпеда).
3) $\angle 4 = \angle DC_1C$ — лінійний кут двогранного кута з ребром B_1C_1, грані якого (ADC_1) і (BCC_1) ($CC_1 \perp B_1C_1$; $DC_1 \perp B_1C_1$ за властивістю прямокутного паралелепіпеда).

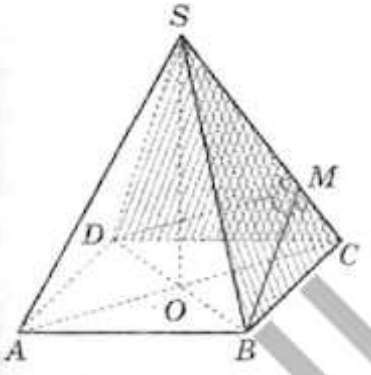
У правильному трикутнику кожна медіана є висотою і бісектрисою.

10. 1) $\angle 1 = \angle DPB$ — лінійний кут двогранного кута з ребром AC, грані якого (ADC) і (ABC) ($DP \perp AC$, $BP \perp AC$ як висоти рівносторонніх трикутників).
2) $\angle 2 = \angle DMA$ — лінійний кут двогранного кута з ребром BC, грані якого (BDC) і (ABC) ($DM \perp BC$, $AM \perp BC$).
3) $\angle 4 = \angle AEC$ — лінійний кут двогранного кута з ребром DB, грані якого (BCD) і (ABD) ($CE \perp DB$; $AE \perp DB$).

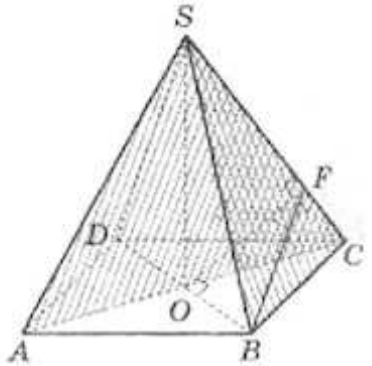
11. $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, основа $ABCD$ — квадрат, O — точка перетину діагоналей квадрата, SO — висота піраміди; бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники.



1) Двогранний кут при ребрі основи — це кут з ребром BC, грані якого (ABC) і (SBC). Проводимо $ON \perp BC$; $SO \perp (ABC)$, $SN \perp BC$ (як відповідна похила за теоремою про три перпендикуляри). Отже, $\angle ONS$ — лінійний кут даного двогранного кута, N — середина BC (в рівнобедреному ΔBSC SN є висотою і медіаною).



2) Двогранний кут при бічному ребрі — це кут з ребром SC, грані якого (BSC) і (DSC). Проводимо $BM \perp SC$, тоді $\angle BMC = 90°$, $\Delta BMC = \Delta DMC$: $BC = DC$ як сторони квадрата, MC — спільна сторона, $\angle BCM = \angle DCM$ як кути рівних рівнобедрених трикутників ΔBSC і ΔDSC. Звідси $\angle BMC = \angle DMC = 90°$, отже, $DM \perp SC$. Значить, $\angle BMD$ — лінійний кут даного двогранного кута.



3) Двогранний кут при бічному ребрі SC між площинами (SBC) і (ASC). Проводимо $OF \perp SC$, тоді $BF \perp SC$ (як відповідна похила за теоремою про три перпендикуляри). Отже, $\angle BFO$ — лінійний кут даного двогранного кута.
Оскільки $BF \perp SC$ і $BM \perp SC$, то точки F та M співпадають.

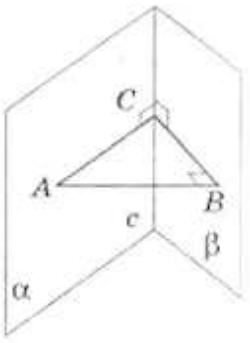
12. α і β — грані двогранного кута, c — ребро;
$AC \perp c$, $BC \perp c$. $\angle ACB$ — лінійний кут даного двогранного кута, $\angle ACB = \varphi$.
1) $AC = 3$, $CB = 4$, $AB = 5$. У ΔABC: $5^2 = 4^2 + 3^2$; $AB^2 = BC^2 + AC^2$, то за теоремою, оберненою до теореми Піфагора: $\angle ACB = 90°$, отже, двогранний кут $90°$.
2) $AC = 2$; $CB = 3$; $AB = \sqrt{7}$.
У ΔABC, використовуючи теорему косинусів, маємо:

$$\cos\varphi = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{2^2 + 3^2 - (7)^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 + 9 - 7}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2};$$

$\varphi = \arccos\frac{1}{2}$; $\varphi = 60°$; $\angle ACB = 60°$, отже, двогранний кут $60°$.

alex-ndt

13. Нехай α, β — грані двогранного кута з ребром c, $\angle(\alpha, \beta) = 45°$.



$A \in \alpha$, $AB \perp \beta$, $AB = \sqrt{128}$ м, AC — ?

Проведемо $AC \perp c$, оскільки $AB \perp \beta$, $c \subset \beta$, то AC — похила, BC — проекція, тому $BC \perp c$ за теоремою про три перпендикуляри, тоді $\angle ACB$ — лінійний кут даного двогранного кута, $\angle ACB = 45°$. У ΔABC: $\angle B = 90°$, $\angle C = 45°$, $AB = \sqrt{128}$ м, $\angle A = 45°$, тобто ΔABC — прямокутний рівнобедрений, $AC = AB \cdot \sqrt{2}$; $AC = \sqrt{128} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{256} = 16$; $AC = 16$ м.

Відповідь: 16 м.

14. Див. рис. до завдання 13. Нехай α і β — грані двогранного кута з ребром c, $A \in \alpha$, $AB \perp \beta$, $AB = 2\sqrt{3}$ см.

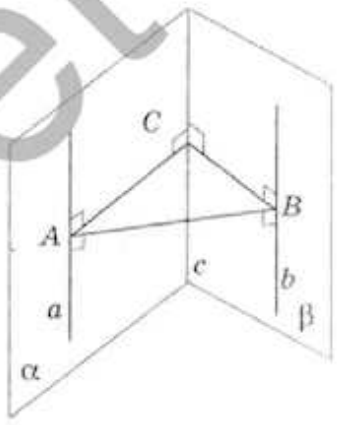
За поясненням до задачі № 13: $AC \perp c$, $AC = \sqrt{48}$ см.

У ΔABC: $\angle B = 90°$, $\sin\angle C = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{48}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$; $\angle C = \arcsin\dfrac{1}{2}$; $\angle C = 30°$;

$\angle ACB = 30°$, отже, $\angle(\alpha; \beta) = 30°$.

Відповідь: 30°.

15. Нехай α і β — грані двогранного кута з ребром c; $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$; $a \parallel c$, $b \parallel c$. Проведемо площину, перпендикулярну до ребра c, вона перетинає грані α і β по прямих, перпендикулярних до c. Ці прямі перетинають прямі a, b і c в точках A, B і C відповідно. Тоді $AC \perp c$, $BC \perp c$, отже, $\angle ACB$ — лінійний кут даного двогранного кута. Оскільки $a \parallel c$, $b \parallel c$, то $AC \perp a$, $BC \perp b$, $AB \perp a$, $AB \perp b$, тоді $AC = 10$ см, $CB = 6$ см, $AB = 14$ см. У ΔABC за теоремою косинусів:



$$\cos\angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC};$$

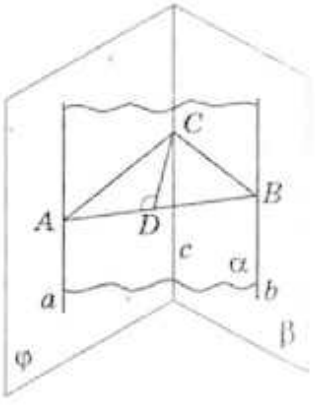
$$\cos\angle C = \frac{10^2 + 6^2 - 14^2}{2 \cdot 10 \cdot 6} = \frac{136 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 6} = \frac{-60}{2 \cdot 10 \cdot 6} = -\frac{1}{2};$$

$$\angle C = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 180° - \arccos\frac{1}{2} = 180° - 60° = 120°, \text{ отже, } \angle(\alpha; \beta) = 120°.$$

Відповідь: 120°.

Якщо дві площини φ і β перетинаються по прямій c, а площина α перетинає їх по паралельних прямих a і b, то пряма c паралельна площині α, $a \parallel c$, $b \parallel c$.

16. Нехай φ і β — грані двогранного кута з ребром c, $\angle(\alpha; \beta) = 30°$.



a, b — прямі перетину деякої площини α з гранями даного двогранного кута, $a \parallel b$ за умовою. За поясненням до задачі № 15, у ΔABC: $\angle C = 30°$; $AC = 6$ см, $BC = 2\sqrt{3}$ см.

Проведемо $CD \perp AB$. Оскільки $(ABC) \perp c$, $(ABC) \perp a$, $(ABC) \perp b$, то $(ABC) \perp \alpha$, тоді $CD \perp \alpha$, CD — шуканий відрізок.

У ΔABC за теоремою косинусів:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$;

$$AB^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30° = 36 + 12 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

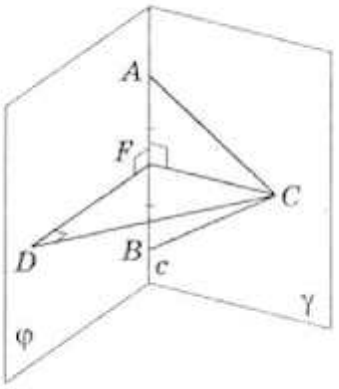
aldz.net

$AB^2 = 12$; $AB = 2\sqrt{3}$ см. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C = \frac{1}{2} AB \cdot CD$;

$6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 30° = 2\sqrt{3} \cdot CD$; $6 \cdot \frac{1}{2} = CD$; $CD = 3$ см.

Відповідь: 3 см.

17. Нехай φ і γ — грані двогранного кута з ребром c, точка $A \in \gamma$, $B \in \gamma$, $C \in \gamma$, причому $AB \subset c$, ΔABC — рівносторонній зі стороною $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.



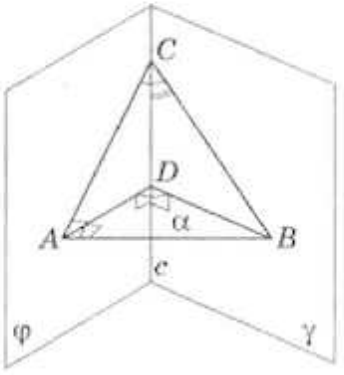
Проведемо $CD \perp \varphi$, $CD = 2$ см; CF — медіана, а отже, висота ΔABC, $CF \perp AB$. CD — перпендикуляр до φ, CF — похила, DF — проекція, тому $DF \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри), тоді $\angle DFC$ — лінійний кут даного двогранного кута, $\angle DFC$ — шуканий.

У ΔABC: $CF = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$; $CF = 4$ см. У ΔDFC: $\angle D = 90°$; $DC = 2$ см, $CF = 4$ см, отже, $\sin \angle F = \frac{CD}{CF} = \frac{1}{2}$; $\angle F = 30°$, отже, $\angle(\varphi, \gamma) = 30°$.

Відповідь: 30°.

18. Нехай φ і γ — грані двогранного кута з ребром c, $\angle(\varphi, \gamma) = \alpha$, $\alpha < 90°$. Нехай $B \in \gamma$, $BA \perp \varphi$, $BC \subset \gamma$. Проведемо $AD \perp c$. BA — перпендикуляр до площини φ, BD — похила, AD — проекція, тому $BD \perp c$ (за теоремою про три перпендикуляри), тоді $\angle ADB$ — лінійний кут даного двогранного кута, $\angle ADB = \alpha$ — шуканий. $\angle BDC = 45°$ (за умовою); BC — похила, AC — проекція, тоді $\angle BCA = 30°$ як кут між BC і площиною φ.

Позначимо BD за x.



У ΔBCD: $\angle D = 90°$; $\angle C = 45°$, тоді $\angle B = 45°$, $BC = x\sqrt{2}$.

У ΔBCA: $\angle A = 90°$; $\angle C = 30°$, тоді $AB = \frac{1}{2} BC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

У ΔBAD: $\angle A = 90°$; $BD = x$,

$AB = \frac{x\sqrt{2}}{2}$; $\sin \angle D = \frac{AB}{BD} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\angle D = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\angle D = 45° = \alpha$ ($\varphi < 90°$).

Відповідь: 45°.

19. Розв'язання аналогічне до розв'язання № 18. $\angle BDA = \angle(\varphi; \gamma) = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $\angle BCA$ — шуканий. Позначимо BD за x.

У ΔBAD: $\angle A = 90°$; $\angle D = \alpha$; $BD = x$; $BA = x \cdot \sin \alpha$.

У ΔCDB: $\angle D = 90°$; $\angle C = \beta$; $BD = x$; $BC = \frac{x}{\sin \beta}$.

У ΔCAB: $\angle A = 90°$; $\angle C = \varphi$; $BC = \frac{x}{\sin \beta}$; $AB = x \sin \alpha$;

$\sin \angle C = \frac{AB}{BC} = \frac{x \sin \alpha}{\frac{x}{\sin \beta}} = \sin \alpha \sin \beta$; $\angle C = \arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$, отже,

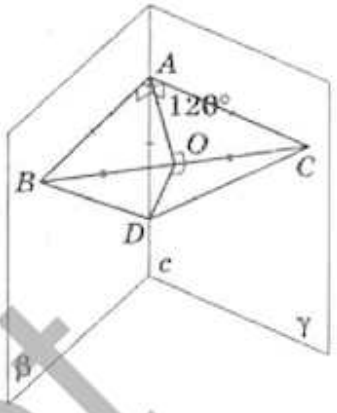
$\varphi = \arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$.

Відповідь: $\arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$.

aldz.net

20. Нехай β і γ — грані двогранного кута з ребром c, $\angle(\beta; \gamma) = 120°$; $A \in c$. Через точку A проведемо площину, перпендикулярну до c, півпрямі перетину цієї площини з гранями двогранного кута утворюють лінійний кут даного двогранного кута. На цих півпрямих відкладемо відрізки AB, AC і AD на прямій c, причому $AB = AC = AD$; $AB \perp c$, $AC \perp c$. Тоді $\Delta BAD = \Delta CAD$, звідси $BD = CD$, а отже, ΔBCD — рівнобедрений. Проведемо медіану DO, яка є висотою рівнобедреного трикутника, тоді $DO \perp BC$, DO — шуканий відрізок.

O — середина BC, AO — медіана, висота і бісектриса рівнобедреного ΔABC.



У ΔAOB: $AB = a$, $\angle O = 90°$, $\angle A = 60°$, $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

У ΔABD: $\angle A = 90°$, $AB = AD = a$, $BD = a\sqrt{2}$.

У ΔBOD: $\angle O = 90°$, $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $BD = a\sqrt{2}$;

за теоремою Піфагора: $DO^2 = BD^2 - BO^2$;

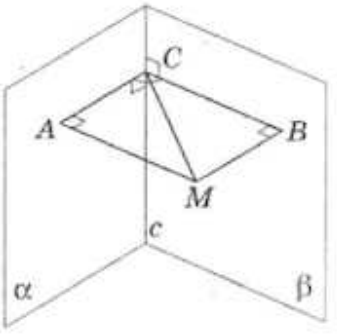
$$DO^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

$$DO^2 = 2a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{4} = \frac{8a^2 - 3a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}; \quad DO = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

21. Нехай α і β — грані даного двогранного кута з ребром c, M знаходиться всередині кута. Проведемо через точку M площину γ, перпендикулярну c, вона перетинає пряму c в точці C, а грані α і β — по прямих CA і CB, $CA \perp c$, $CB \perp c$; $\angle ACB$ — лінійний кут даного двогранного кута. Проведемо $MA \perp CA$, $MB \perp BC$, тоді $MA \perp \alpha$, $MB \perp \beta$.

За умовою $\angle(\alpha; \beta) = 60°$, отже, $\angle ACB = 60°$; $MA = 22$ см, $MB = 1$ см. Оскільки $MC \subset \gamma$, то MC — шукана відстань, позначимо її за x.



У ΔACM: $\angle A = 90°$; за теоремою Піфагора:

$AC^2 = CM^2 - AM^2$; $AC^2 = x^2 - 22^2$; $AC = \sqrt{x^2 - 22^2}$.

У ΔBCM: $\angle B = 90°$; за теоремою Піфагора:

$BC^2 = CM^2 - BM^2$; $BC^2 = x^2 - 1^2$; $BC = \sqrt{x^2 - 1}$.

У чотирикутнику $ACBM$: $\angle A = \angle B = 90°$; $\angle C = 60°$;

$\angle M = 360° - (2 \cdot 90° + 60°) = 120°$.

У ΔABM за теоремою косинусів:

$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos 120°$;

$$AB^2 = 22^2 + 1^2 + 2 \cdot 22 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 507.$$

У ΔACB: за теоремою косинусів: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 60°$;

$$AB^2 = x^2 - 22^2 + x^2 - 1^2 - 2 \cdot \sqrt{x^2 - 22^2} \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{2};$$

$$x^2 - 484 + x^2 - 1 - \sqrt{(x^2 - 22^2)(x^2 - 1)} = 507; \quad 2x^2 - 992 = \sqrt{(x^2 - 22^2)(x^2 - 1)}.$$

Позначимо $x^2 = t$, за умовою $2x^2 - 992 > 0$, маємо:

$$(2t - 992)^2 = \left(\sqrt{(t - 22^2)(t - 1)}\right)^2; \quad 4t^2 - 2 \cdot 2t \cdot 992 + 992^2 = t^2 - 484t - t + 484;$$

$3t^2 - 4t \cdot 992 + 992^2 - 484 + 484t + t = 0$; $3t^2 - 3483t + 983\,580 = 0 \mid : 3$;

$t^2 - 1161t + 327\,860 = 0$; $D = 1\,347\,921 - 1\,311\,440 = 36\,481$; $\sqrt{D} = 191$;

$$t = \frac{1161 \pm \sqrt{91}}{2}; \quad t_1 = 676; \quad t_2 = 485; \quad x_1^2 = 676; \quad x_2^2 = 485; \quad 2 \cdot 676 - 992 > 0;$$

ellov.net

$2 \cdot 485 - 992 < 0$. Отже, $x^2 = 676$, $x > 0$, $x = \sqrt{676}$, $x = 26$; $CM = 26$ см.
Відповідь: 26 см.

22. Розв'язання і малюнок аналогічні до № 21.
$\angle ACB = 120°$; $AM = 22$ см, $MB = 23$ см; $\angle M = 360° - (2 \cdot 90° + 120°) = 60°$;
$AC^2 = x^2 - 22^2$; $BC^2 = x^2 - 23^2$.

У ΔAMB за теоремою косинусів: $AB^2 = 22^2 + 23^2 - 2 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \frac{1}{2} = 507$.

У ΔABC: за теоремою косинусів:

$$AB^2 = x^2 - 22^2 + x^2 - 23^2 + 2\sqrt{x^2 - 22^2} \cdot \sqrt{x^2 - 23^2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$x^2 - 484 + x^2 - 529 + \sqrt{(x^2 - 22^2)(x^2 - 23^2)} = 507;$$

$$2x^2 - 1520 = -\sqrt{(x^2 - 22^2)(x^2 - 23^2)}; \quad 1520 - 2x^2 = \sqrt{(x^2 - 484)(x^2 - 529)}.$$

Позначимо $x^2 = t$, за умовою $2x^2 - 1520 < 0$.

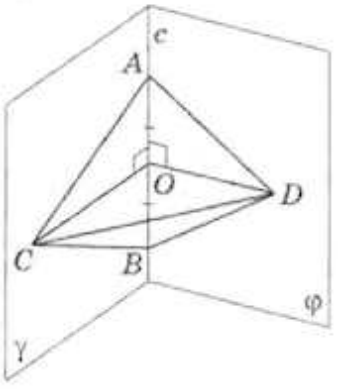
$$(1520 - 2t)^2 = \left(\sqrt{(t - 484)(t - 529)}\right)^2;$$

$2\,310\,400 - 6080t + 4t^2 = t^2 - 484t - 529t + 256\,036$;
$3t^2 - 5067t + 2\,054\,364 = 0 \mid : 3$; $t^2 - 1689t + 684\,788 = 0$;

$D = 2\,852\,721 - 2\,739\,152 = 113\,569$; $\sqrt{D} = 337$; $t = \frac{1689 \pm 337}{2}$; $t_1 = 1013$;

$t_2 = 676$; $x_1^2 = 1013$; $x_2^2 = 676$; $2 \cdot 1013 - 1520 > 0$; $2 \cdot 676 - 1520 < 0$.
Отже, $x^2 = 676$, $x > 0$, $x = \sqrt{676}$, $x = 26$, $CM = 26$ м.
Відповідь: 26 м.

23. Нехай γ і φ — грані даного двогранного кута з ребром c, $\angle(\gamma; \varphi) = 60°$; $A \in c$, $B \in c$, $AB = 24$ см, $C \in \gamma$, $AC = BC = 13$ см; $D \in \varphi$, $AD = BD = 15$ см, тоді ΔACB і ΔADB рівнобедрені з основою AB. Нехай точка O — середина AB, тоді CO і DO — медіани і висоти ΔACB і ΔADB відповідно, отже, $CO \perp AB$, $CO \perp c$, $DO \perp AB$, $DO \perp c$, значить, $\angle COD$ — лінійний кут даного двогранного кута, $\angle COD = 60°$, CD — шуканий відрізок.



У ΔAOC: $\angle O = 90°$; $AO = \frac{1}{2}AB = 12$ см; $AC = 13$ см,

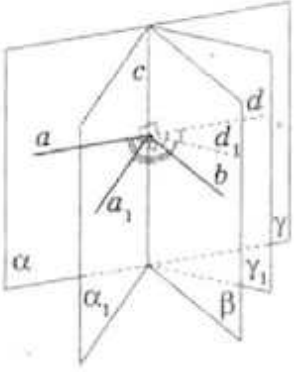
$CO^2 = AC^2 - AO^2$; $CO^2 = 13^2 - 12^2$; $CO^2 = 25$; $CO = 5$ см.
У ΔAOD: $\angle O = 90°$; $DO^2 = AD^2 - AO^2$; $DO^2 = 81$;
$DO = 9$ см.
У ΔCOD: за теоремою косинусів:
$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2CO \cdot OD \cos 60°$;

$CD^2 = 5^2 + 9^2 - 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}$; $CD^2 = 61$; $CD = \sqrt{61}$ см.

Відповідь: $\sqrt{61}$ см.

24. Побудова бісектора двогранного кута описана в §11.

25. Нехай α, β, γ — грані суміжних двогранних кутів з ребром c (c — спільне ребро). Проведемо площину φ, перпендикулярну до прямої c, півпрямі перетину цієї площини з гранями двогранного кута утворюють лінійні кути даних суміжних двогранних кутів: a, b, d — півпрямі перетину з гранями α, β, γ відповідно. Нехай α_1 і γ_1 — бісектриси даних двогранних кутів $\angle(\alpha; \beta)$ і $\angle(\gamma; \beta)$ відповідно; a_1 і d_1 — півпрямі перетину цих площин із площиною φ. $a \perp c$, $b \perp c$, $d \perp c$, $a_1 \perp c$, $d_1 \perp c$, отже, $\angle(ab)$, $\angle(bd)$ — лінійні кути даних двогранних кутів, a_1 і d_1 — бісектриси цих лінійних кутів.



alov.net

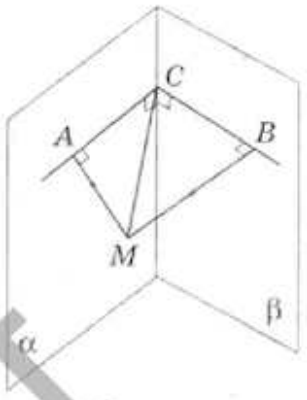
Оскільки дані двогранні кути суміжні, то відповідні лінійні кути також суміжні, отже, $\angle(ab) + \angle(bd) = 180°$.

$\angle(a_1b) = \frac{1}{2}\angle(ab)$; $\angle(bd_1) = \frac{1}{2}\angle(bd)$;

$\angle(a_1b) + \angle(bd_1) = \frac{1}{2}(\angle(ab) + \angle(bd)) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Отже, $\angle(\alpha_1; \gamma_1) = 90°$.

Відповідь: 90°.

26. Нехай α і β — грані даного двогранного кута з ребром c, M — деяка точка всередині цього кута. Через точку M проведемо площину φ, перпендикулярну c, прямі перетину з гранями a і b відповідно утворюють лінійний кут даного двогранного кута; $a \perp c$, $b \perp c$. За умовою т. M рівновіддалена від сторін кута. Проведемо $MA \perp a$, $MB \perp b$, C — точка перетину площини φ і прямої c. Розглянемо ΔMAC і MBD: $\angle A = \angle B = 90°$; $MA = MB$ за умовою, MC — спільна, тоді $\Delta MAC = \Delta MBC$, звідси $\angle MCA = \angle MCB$, тобто CM — бісектриса кута ACB. ГМТ бісектрис двогранного кута — це бісектор двогранного кута.



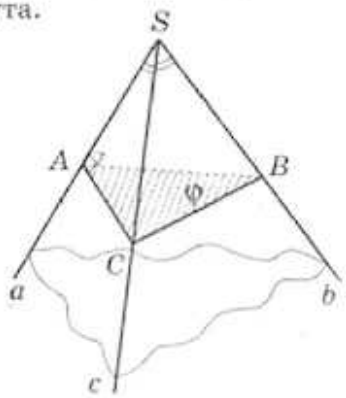
Висновок: ГМТ, які містяться всередині даного двогранного кута і рівновіддалені від граней цього кута, — бісектор даного двогранного кута.

§ 12. Тригранні кути. Багатогранні кути

Завдання 10

1. Приклад тригранного кута: у кімнаті дві суміжні стіни та стеля, які є гранями тригранного кута, лінії перетину — ребра цього кута, точка, в якій перетинаються всі три лінії, (куток) — вершина тригранного кута.

2. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут, a, b, c — його ребра, S — вершина, φ — площина, $\varphi \perp a$, A — точка перетину. Тоді φ перетинає площини, утворені ребрами a, c і a, b, по прямих, перпендикулярних до a, C і B — точки перетину. Тоді AC, BA, BC — лінії перетину граней кута з площиною φ.



3. 1) Шестигранний кут має 1 вершину, 6 граней і 6 ребер.
2) n-гранний кут має 1 вершину, n граней і n ребер.

4. Якщо ребер 12, то і граней 12.

5. 1) Так; 2) так; 3) так.

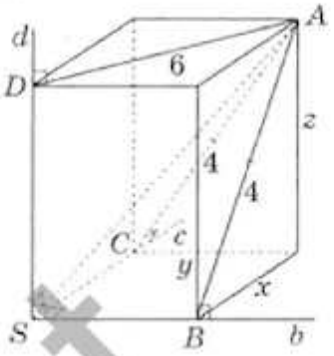
> 1. Міра кожного з плоских кутів тригранного кута менша за суму мір двох інших кутів.
> 2. Сума плоских кутів тригранного кута менша за 360°.

6. 1) $158° + 171° + 132° = 461° > 360°$; ні;
2) $103° + 96° + 78° = 277°$; $103° < 96° + 78°$; так;
3) $112° + 164° + 95° = 371° > 360°$; ні;
4) $82° + 67° + 151° = 300°$; $151° > 82° + 67°$; $151° > 149°$; ні.

alds.net

7. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут, d, b, c — його ребра, S — вершина. Точка A знаходиться всередині тригранного кута. Опустимо перпендикуляр на ребра: $AC \perp c$, $AB \perp b$, $AD \perp d$, $AC = AB = 4$ см, $AD = 6$ см, SA — шукана відстань. Оскільки за умовою всі плоскі кути прямі: $\angle BSD = \angle BSC = \angle DSC = 90°$; $d \perp (SBC)$, $b \perp (SDC)$, $c \perp (SBD)$, то $AD \parallel (SBC)$, $AB \parallel (SDC)$, $AC \parallel (SBD)$, тоді можемо розглянути прямокутний паралелепіпед, для якого площини (SBC), (SDC), (SBD) є суміжними гранями зі спільною вершиною S; AD, AB, AC — діагоналі відповідних протилежних граней. Значить, шукана відстань SA — діагональ паралелепіпеда. Позначимо його виміри за x, y, z ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Маємо:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ x^2 + z^2 = 4, \\ y^2 + z^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = y^2, \\ x^2 + z^2 = 4, \\ 2x^2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 3, \\ y^2 = 3, \\ z^2 = 1 \end{cases}$$



або $\begin{cases} x^2 + 4^2 = 6 \\ x^2 + z^2 = 4 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ $+ \; 2(x^2 + y^2 + z^2) = 14$; $x^2 + y^2 + z^2 = 7$.

Для прямокутного паралелепіпеда: $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 7$; $d = \sqrt{7}$; $AC = \sqrt{7}$ см.

Відповідь: $\sqrt{7}$ см.

8. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут, a, b, c — його ребра, S — вершина. Точка P знаходиться всередині тригранного кута. Опустимо перпендикуляри на ребра з точки P: $PA \perp a$, $PB \perp b$, $PC \perp c$; $PA = 5$ см, $PB = 7$ см, $PS = 3\sqrt{5}$ см, CP — шукана відстань.

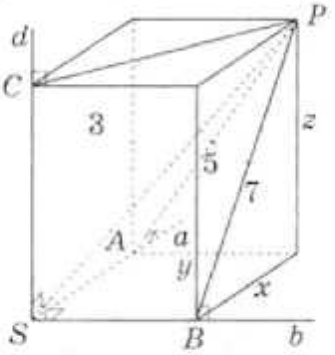
Аналогічно до розв'язання задачі № 7, маємо:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2, \\ x^2 + y^2 = 5^2, \\ y^2 + z^2 = 7^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 45 \mid \cdot 2, \\ x^2 + y^2 = 25, \\ y^2 + z^2 = 49; \end{cases}$$

$2(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + y^2 + z^2) = 90 - 74$;

$x^2 + z^2 = 16$.

Отже, $PC = \sqrt{16}$; $PC = 4$ см.



Зауваження: насправді ситуація з такими даними не існує, бо система не має розв'язків, а в ΔSPB гіпотенуза $SP = 3\sqrt{5}$, катет $PB = 7$, але $3\sqrt{5} < 7$.

9. Позначимо величини плоских кутів даного тригранного кута α, β, γ; за умовою $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

За теоремою 5 §12: усі двогранні кути даного тригранного кута також рівні. Позначимо величину кожного з двогранних кутів φ. Тоді за теоремою косинусів для тригранного кута (теорема 3 §12), маємо:

$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi$;

$\cos 60° = \cos 60° \cdot \cos 60° + \sin 60° \cdot \sin 60° \cdot \cos\varphi$;

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi$; $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \cos\varphi$; $\frac{3}{4}\cos\varphi = \frac{1}{4}$; $\cos\varphi = \frac{1}{3}$;

$\varphi = \arccos\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\arccos\frac{1}{3}$.

10. Позначимо величини плоских кутів даного тригранного кута α, β, γ. За умовою: $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$. Оскільки проти рівних плоских кутів у тригранному

alds.net

куті лежать рівні двогранні кути (§12), то позначимо величину кожного з них φ. Тоді за теоремою косинусів для тригранного кута (теорема 3 §12), маємо:
$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi$;
$\cos 60^\circ = \cos 90^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 90^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos\varphi$;

$$\frac{1}{2} = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\varphi;\quad \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi;\quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Позначимо величини плоских кутів даного тригранного кута α, β, γ; за умовою $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. Позначимо величини відповідних двогранних кутів γ, δ, ω. За теоремою косинусів для тригранного кута (теорема 3 §12), маємо:
1) $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\omega$;
$\cos 60^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos\omega$;

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\omega;\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\omega;\quad \cos\omega = 0;\ \omega = 90^\circ;$$

2) $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi$; $\cos 45^\circ =$
$= \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos\varphi$;

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\varphi;\quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\cos\varphi;\quad \frac{\sqrt{6}}{4}\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4};\quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{6}};$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}};\quad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $\omega = 90^\circ$; $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут, S — вершина. Виберемо на ребрі a деяку точку A, проведемо $AO \perp (bc)$, $OB \perp b$, $OC \perp c$, AB і AC — похилі; OB і OC — відповідні проекції; тоді $AB \perp b$, $AC \perp c$ (за теоремою про три перпендикуляри), отже, $\angle ABO$ і $\angle ACO$ — лінійні кути двогранних кутів з ребрами b і c (рис. 1).
За умовою $\angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$, тобто $AB \perp (bc)$, $AC \perp (bc)$, значить, $(ab) \perp (bc)$, $(ac) \perp (bc)$, це означає, що $AS \perp (bc)$ (рис. 2), отже, $\angle ASB = \angle ASC = 90^\circ$.
Висновок: плоскі кути, протилежні прямим двогранним, також є прямими.

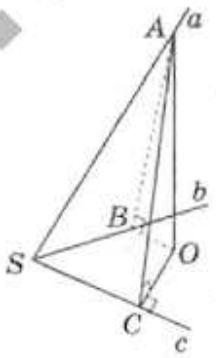


Рис. 1

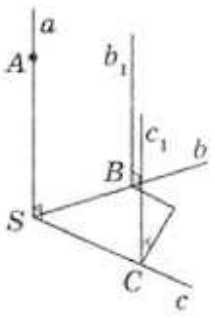
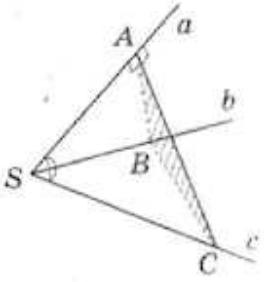


Рис. 2

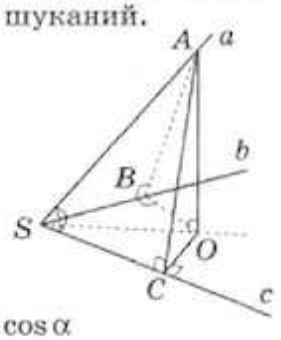
13. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут, S — вершина. На ребрі a вибрано точку A таку, що $AS = a$. Через точку A проведемо площину, що перетинає b і c в точках B і C відповідно.
За умовою $(ABC) \perp a$, тоді $AC \perp a$, $BA \perp a$.
$\angle ASC = \angle ASB = \angle BSC = 60^\circ$.
У ΔASC: $\angle A = 90^\circ$; $SA = a$; $\angle S = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$,
$SC = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$.



Аналогічно в ΔASB: $AB = a\sqrt{3}$, $SB = 2a$.
У ΔBSC: $BS = SC = 2a$; $\angle BSC = 60^\circ$, тоді ΔSBC — рівносторонній, $BC = 2a$.
У ΔABC: $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = a\sqrt{3} + a\sqrt{3} + 2a = 2a\sqrt{3} + 2a = 2a\left(\sqrt{3} + 1\right)$.
Відповідь: $2a\left(\sqrt{3} + 1\right)$.

gdz.net

14. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут, S — вершина, всі плоскі кути рівні і дорівнюють α. Нехай точка A належить ребру a. Проведемо $AO \perp (bc)$, $AB \perp b$, $AC \perp c$; AB і AC — похилі, OB і OC — відповідні проекції, тому $OB \perp b$, $OC \perp c$ (за теоремою про три перпендикуляри). AS — похила, SO — проекція на площину (bc), тому $\angle ASO$ — кут між ребром a і гранню (bc) — шуканий.



Позначимо AS за x.

У ΔASC: $\angle C = 90°$, $\angle S = \alpha$, $AS = x$, $SC = x\cos\alpha$.

$\Delta ASC = \Delta ASB$: $\angle C = \angle B = 90°$; $\angle ASC = \angle ASB = \alpha$;

AS — спільна, отже, $SB = SC$; $AB = AC$.

$\Delta SOC = \Delta SOB$: $\angle C = \angle B = 90°$; $SC = SB$,

SO — спільна, отже, $OC = OB$; $\angle OSC = \angle OSB = \dfrac{\alpha}{2}$.

У ΔOSC: $\angle C = 90°$; $SC = x\cos\alpha$; $\angle OSC = \dfrac{\alpha}{2}$, $SO = \dfrac{SC}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{x\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

У ΔASO: $\angle O = 90°$; $AS = x$;

$$SO = \frac{x\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\angle S = \frac{SO}{AS} = \frac{x\cos\alpha}{x\cos\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\angle S = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}};\quad \angle ASO = \arccos\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Відповідь: $\arccos\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$.

15. Якщо кожен плоский кут тригранного кута дорівнює α, то за теоремою косинусів для тригранного кута: $\cos\alpha = \cos\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi$, φ — лінійний кут відповідного двогранного кута (оскільки плоскі кути рівні, то і двогранні також рівні — за теоремою 5 §12).

$\cos\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos\varphi$; $\sin^2\alpha\cos\varphi = \cos\alpha - \cos^2\alpha$;

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha};\quad \varphi = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right).$$

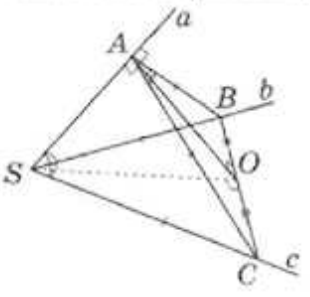
Відповідь: $\arccos\left(\dfrac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$.

16. Якщо кожен двогранний кут тригранного кута дорівнює φ, то за теоремою 5 §12 усі плоскі кути також рівні.

Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут, S — вершина. Проведемо площину, перпендикулярну до ребра a, вона перетинає ребра a, b, c в точках A, B, C відповідно; $BA \perp a$, $CA \perp a$, $\angle BAC = \varphi$ — лінійний кут двогранного кута з ребром a. Оскільки плоскі кути рівні, то $\angle ASC = \angle BSC = \angle BSA = \alpha$.

$\Delta ASC = \Delta ASB$: $\angle SAC = \angle SAB = 90°$; $\angle ASC = \angle ASB = \alpha$; AS — спільна, тоді $AC = AB$; $SC = SB$, отже, ΔBSC і ΔBAC — рівнобедрені з основою BC. Позначимо середину BC — точка O, тоді медіани SO і AO є висотами і бісектрисами;

$\angle CSO = \dfrac{\alpha}{2}$; $\angle CAO = \dfrac{\varphi}{2}$.



Оберемо довжину відрізка $AC = x$.

У ΔACO: $\angle O = 90°$; $OC = x\cdot\sin\dfrac{\varphi}{2}$.

У ΔACS: $\angle A = 90°$; $\angle S = \alpha$; $AC = x$; $SC = \dfrac{x}{\sin\alpha}$.

У ΔSCO: $\angle O = 90°$; $\sin\angle CSO = \dfrac{OC}{SC}$;

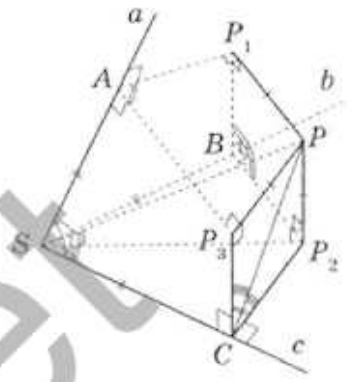
aldz.net

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{x}{\sin\alpha}};\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\cdot\sin\frac{\varphi}{2};\quad \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}};\quad \frac{\alpha}{2}=\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}};\quad \alpha=2\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Відповідь: плоский кут $\alpha=2\arccos\dfrac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

17. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут з вершиною S. За умовою всі двогранні кути рівні, а отже, всі плоскі кути рівні. P — точка всередині даного тригранного кута, $SP = a$. Оскільки точка P рівновіддалена від усіх граней кута, то вона належить кожному бісектору відповідного двогранного кута і за теоремою 6 § 12, SP — промінь, по якому перетинаються бісектори. Проведемо $PP_1 \perp (ab)$, $PP_2 \perp (bc)$, $PP_3 \perp (ac)$, за умовою $PP_1 = PP_2 = PP_3$; проведемо $PA \perp a$, $PB \perp b$, $PC \perp c$. $PP_1 \perp (ab)$, PA — похила, тоді P_1A — проекція, $P_1A \perp a$ за теоремою про три перпендикуляри.



Аналогічно $P_1B \perp b$, $P_2B \perp b$, $P_2C \perp c$, $P_3C \perp c$, $P_3A \perp a$, тоді $\angle P_1AP_3 = \angle P_1BP_2 = \angle P_2CP_3 = \varphi$ — лінійні кути двогранних кутів при ребрах a, b, c тригранного кута. Позначимо плоскі кути за α: $\angle ASC = \angle ASB = \angle BSC = \alpha$; $P_1P = P_2P = P_3P$ за x. $\Delta PP_3C = \Delta PP_2C$: $PP_3 = PP_2$; $\angle P_3 = \angle P_2 = 90°$, PC — спільна, отже, $\angle PCP_3 = \angle PCP_2 = \dfrac{\varphi}{2}$.

У ΔPP_2C: $\angle P_2 = 90°$; $PP_2 = x$; $\angle PCP_2 = \dfrac{\varphi}{2}$, тоді $P_2C = x\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$.

У ΔSPP_2: $\angle P_2 = 90°$; $PP_2 = x$; $SP = a$, тоді
$SP_2^2 = SP^2 - PP_2^2 = a^2 - x^2$; $SP_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$.

У ΔSP_2C: $\angle C = 90°$; $\angle P_2SC = \dfrac{\alpha}{2}$ (SP_2 — бісектриса $\angle BSC$); $\sin\angle P_2SC = \dfrac{P_2C}{P_2S}$;

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{a^2-x^2}};\quad \sqrt{a^2-x^2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=x\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};\quad (a^2-x^2)\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=x^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2};$$

$$(a^2-x^2)\cdot\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=x^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

За висновком задачі № 17: $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

$$(a^2-x^2)\cdot\left(1-\frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)=x^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2};\quad (a^2-x^2)\cdot\left(\frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2}-1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)=x^2\cdot\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\left(\varphi\neq 0;\ \varphi\neq 180°;\ \sin\frac{\varphi}{2}\neq 0\right);\quad (a^2-x^2)\left(4\sin^2\frac{\varphi}{2}-1\right)=4x^2\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

$$4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}-4x^2\sin^2\frac{\varphi}{2}-a^2+x^2=4x^2\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

alloz.net

$$4x^2\cos^2\frac{\varphi}{2}+4x^2\sin^2\frac{\varphi}{2}-x^2=4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}-a^2;$$

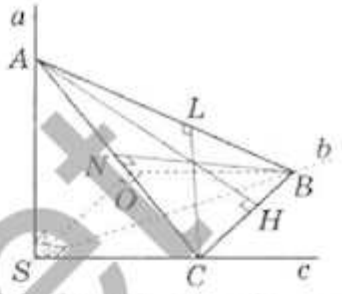
$$4x^2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)-x^2=a^2\left(4\sin^2\frac{\varphi}{2}-1\right);\quad 4x^2-x^2=a\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2\sin^2\frac{\varphi}{2}-1\right);$$

$$3x^2=a^2(1-2\cos\varphi);\quad x^2=\frac{a^2(1-2\cos\varphi)}{3};\quad x=a\sqrt{\frac{1-2\cos\varphi}{3}}.$$

Отже, $PP_1=PP_2=PP_3=a\sqrt{\frac{1-2\cos\varphi}{3}}$.

Відповідь: $a\sqrt{\frac{1-2\cos\varphi}{3}}$.

18. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут із вершиною S, усі плоскі кути якого прямі. φ — деяка площина, що перетинає ребра a, b, c в точках A, B, C відповідно. $SO\perp(ABC)$ за умовою, тоді $SO\perp AO$, M — точка перетину прямих AO і BC. Оскільки $SA\perp(SBC)$ за умовою, то $SA\perp BC$; SA — похила до площини (ABC), AO — проекція, тому $AO\perp BC$, отже, $AM\perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), звідси: AM — висота ΔABC.

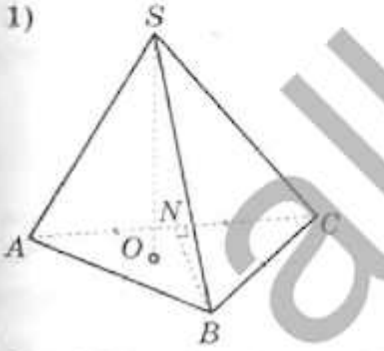


Аналогічно: N, L — точки перетину прямих BO і AC, CO і AB відповідно; BN і CL — висоти ΔABC. Оскільки всі відрізки проходять через точку O, то O — ортоцентр ΔABC.

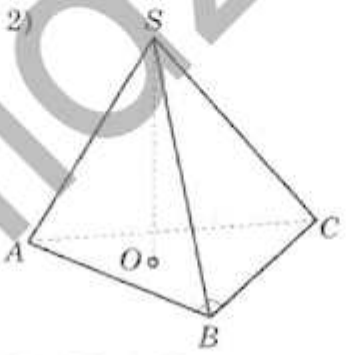
Висновок: основа перпендикуляра є ортоцентром трикутника перерізу.

19. $Sabc$ — даний тригранний кут із вершиною S; A, B, C — точки перетину деякої січної площини з ребрами a, b, c відповідно. Усі плоскі кути тригранного кута за умовою різні. Тоді отримали трикутну піраміду з основою ABC і вершиною S; $SO\perp(ABC)$, SO — висота піраміди.

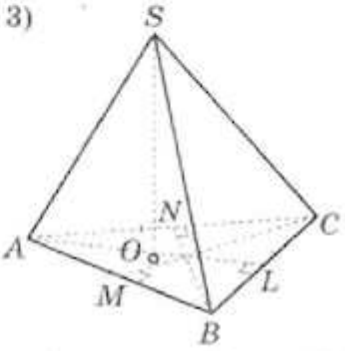
1)



2)



3)



1) ΔABC — рівнобедрений, $AB=BC$ (т. O не належить висоті, проведеній до AC).

2) ΔABC — прямокутний.

3) ΔABC — рівносторонній (т. O не належить жодній висоті ΔABC).

20. $Sabcd$ — даний чотиригранний кут із вершиною S; A, B, C, D — точки перетину деякої січної площини з ребрами a, b, c, d відповідно. Усі плоскі кути чотиригранного кута різні за умовою. Тоді отримали чотирикутну піраміду з основою $ABCD$ і вершиною S; $SO\perp(ABC)$, SO — висота піраміди.

1) $ABCD$ — трапеція.

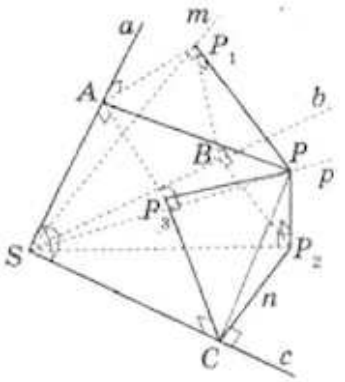
2) $ABCD$ — прямокутна трапеція.

3) $ABCD$ — паралелограм (O не співпадає з точкою перетину діагоналей).

21. Нехай $Sabc$ — даний тригранний кут з вершиною S, m — бісектриса $\angle(ab)$, n — бісектриса $\angle(bc)$, через m і n проведемо площини, перпендикулярні до (ab) і (bc), p — пряма їх перетину — проходить через точку S.

allzz.net

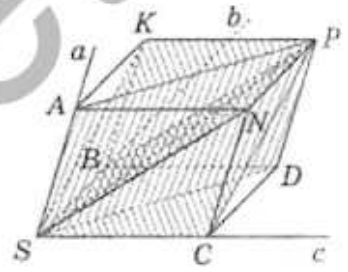
Виберемо точку P, що $P \in p$. Проведемо перпендикуляри з точки P до прямих m і n, $PP_1 \perp m$; $PP_2 \perp n$ і до прямої b. $PB \perp b$. Тоді PB — похила до площин (ab) і (bc), P_1B і P_2B — проекції на площини (ab) і (bc) відповідно, тоді $P_1B \perp b$, $P_2B \perp b$ (теорема про три перпендикуляри). Проведемо $P_1A \perp a$, $P_2C \perp c$. Оскільки $PP_1 \perp (ab)$, $PP_2 \perp (bc)$, то PA і PC — похилі, P_1A і P_2C — відповідні проекції на площини, тоді $PA \perp a$, $PC \perp c$ (теорема про три перпендикуляри). Оскільки m і n — бісектриси плоских кутів, то $P_1A = P_1B$, $P_2C = P_2B$, тоді $SB = SA$, $SB = SC$, отже, $SA = SC$ (точки, що належать бісектрисі кута, рівновіддалені від його сторін).



Проведемо з точки P перпендикуляр до площини (ac): $PP_3 \perp (ac)$, тоді PA і PC — похилі, P_3A і P_3C — відповідні проекції. Оскільки $PA \perp a$ і $PC \perp c$, то $P_3A \perp a$, $P_3C \perp c$ (теорема про три перпендикуляри). $\Delta SAP_3 = \Delta SCP_3$: $\angle A = \angle C = 90°$; SP_3 — спільна; $SA = SC$, отже, SP_3 — бісектриса $\angle ASC$, а площини $(PP_3S) \perp (SAC)$, $P \in (PP_3S)$; SP — пряма перетину (PP_1S), (PP_2S), (PP_3S).

Висновок: площини, перпендикулярні граням тригранного кута, що проходять через бісектриси граней, перетинаються по одній прямій.

22. Розглянемо паралелепіпед $SBDCAKPN$, усі грані якого — ромби, тригранний кут — кут із вершиною S і ребрами, що виходять із цієї вершини: SA, SB, SC. Оскільки всі грані — ромби, то їх діагоналі є бісектрисами кутів: SK, SD, SN — бісектриси $\angle ASB$, $\angle BSC$, $\angle ASC$ відповідно. Площини, що проходять через бісектрису кожної з граней, і протилежне до цієї грані ребро — діагональні перерізи $SKPC$, $SAPD$, $SKPN$; S і P — спільні точки цих площин, отже, всі три площини перетинаються по прямій SP.



РОЗДІЛ 3. ТІЛА. БАГАТОГРАННИКИ. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

§ 14. Багатогранники. Правильні багатогранники

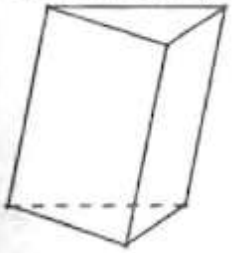
Для кожного опуклого багатогранника сума числа вершин В і числа граней Г на 2 більша за число його ребер Р: В + Г − Р = 2 (формула Ейлера).

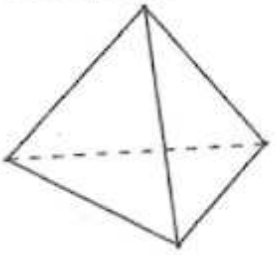
Завдання 11

1. Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда; Г = 6; Р = 12; В = 8; двогранних кутів 8; тригранних кутів 8.
2. Опуклий — тетраедр. Неопуклий — гіперкуб.
3. 3 (тетраедр).
4. Безліч. Приклад: піраміда з n-кутником в основі має n бічних ребер при вершині.
5. 6 (тетраедр).
6. 1) 8; 2) 8; 3) —; 4) 4.
7. 6 (тетраедр).

allgz.net

8. 1) трикутна призма; 2) тетраедр.





9. Ні. Правильна чотирикутна призма основами має обов'язково квадрати, а бічними гранями — прямокутники. Прямокутний паралелепіпед гранями має прямокутники.

10. Так, правильна чотирикутна призма основою має квадрат, а бічною гранню — прямокутник. Прямокутник з рівними сторонами — квадрат. Якщо всі грані — квадрати, то ця призма — куб.

11. Так, трикутна призма.

12. Правильна трикутна піраміда має за основу правильний трикутник, а бічні грані — рівнобедрені трикутники.

13. За означенням призми бічні грані — паралелограми. Протилежні сторони паралелограмів — паралельні прямі. Оскільки дві прямі, паралельні до третьої, паралельні між собою, то всі бічні ребра паралельні між собою.

14. Оскільки всі бічні грані — квадрати, а у квадрата суміжні сторони перпендикулярні, то у даної призми всі бічні ребра перпендикулярні площині основи, тому дана призма є прямою.

15. Ні, бо в 2-х вершинах буде сходитись по три ребра, а в 3-х — по чотири ребра.

16. Ні, вид багатогранника не залежить від його розташування.

17. 3 при ребрах нижньої основи, 3 при ребрах верхньої основи і 3 при бічних ребрах — 9 двогранних кутів разом.

18. 1) Оскільки ребер 12, то і двогранних кутів — 12.
2) Ребер 12, то плоских кутів — 24.
(Приклади: куб — 8 вершин по 3 ребра — 24 плоскі кути; октаедр — 6 вершин по 4 ребра — 24 плоскі кути; шестикутна піраміда — 6 вершин по 3 і 1 по 6 — 24 плоскі кути).

19. Так, бо у призми однакову кількість ребер мають обидві основи і бічна поверхня: $n + n + n = 3n$.

20. Усього граней 18, 2 грані — верхня і нижня основи, отже, бічна поверхня має $18 - 2 = 6$ граней. Тобто в основі 16-кутник.

21. 1) n-кутна піраміда має: n вершин основи і 1 вершину, тобто всього $n + 1$ вершину; $2n$ ребер; $n + 1$ (n бічних і 1 основу) граней.
2) 3 плоских кути при кожній вершині основи, всього $3n$ і n плоских кутів при вершині. Загальна кількість $3n + n = 4n$ плоских кутів.

22. Нехай основою піраміди є n-кутник, він має n вершин і n ребер. Кожну з вершин основи сполучає з вершиною піраміди бічне ребро. Маємо: n ребер основи і n ребер бічних; всього $2n$ ребер; $2n$ — парне число, кратне 2.

23. Сума всіх кутів n-кутника основи піраміди дорівнює $180°(n - 2)$; бічна поверхня складається з n трикутників. Сума кутів трикутника 180°. Разом маємо: $180°(n - 2) + 180° \cdot n = 180°n - 360° + 180°n = 360°n - 360° = 360°(n - 1)$.

alldz.net

24. Піраміда має $4n$ плоских кутів (№ 21 §14), $n \in N$.

1) $4n = 18$; $n = \frac{18}{4}$; $n = 4{,}5$; $4{,}5 \notin N$; не існує;

2) $4n = 20$; $n = 5$; так, існує.

25. 1) Одна грань багатогранника — п'ятикутник; інші грані можуть бути трикутниками, тоді це — п'ятикутна піраміда.

2) Якщо інші грані — чотирикутники, то число ребер непарне: $5 + 4n$, отже, це не піраміда; якщо це призма, то дві грані повинні бути п'ятикутники, а інші — паралелограми.

26. У кожній призмі число ребер кратне 3, $7 \not\vdots 3$; число ребер піраміди — парне; 7 — непарне число; n-гранник з найменшою кількістю вершин $n = 4$ має 4 вершини, 6 ребер, 4 грані; $6 < 7$.

Наступний n-гранник: кількість вершин $n = 5$, ребер — 8, граней — 5, $8 > 7$.

Отже, 7-гранник не існує.

27. За формулою Ейлера: $В + Г - Р = 2$; $В = 2 + Р - Г$.

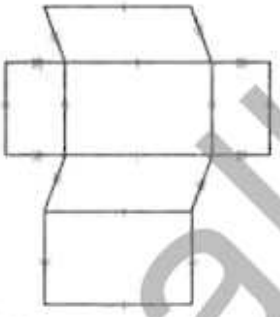
Оскільки кількість вершин довільного багатогранника $В \geq 4$, то $2 + Р - Г \geq 4$; $Р - Г \geq 2$.

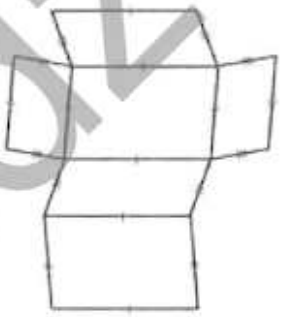
Отже, $Р > Г$ (ребер більше, ніж граней).

§15. Властивості призми

Загальні властивості призми:
— основи призми — рівні багатокутники, всі бічні грані — паралелограми;
— n-кутна призма має $2n$ вершин, $n + 2$ граней, $3n$ ребер;
— діагональний переріз призми — паралелограм;
— $S_б = l \cdot P_\perp$.

Завдання 12

1. 

2. 

3. Якщо взяти за основу паралелепіпеда паралелограм, а бічні грані — прямокутники, отримаємо прямий паралелепіпед; якщо взяти за основу паралелепіпеда прямокутник, а за бічну грань — паралелограм, отримаємо похилий паралелепіпед.

4. Якщо основою прямої призми є ромб, то:
— бічні ребра перпендикулярні до основи;
— усі бічні грані — рівні прямокутники;
— бічне ребро є висотою;
— діагональні перерізи перпендикулярні.
— $S_б = 4a \cdot l$, де a — сторона ромба, l — довжина бічного ребра.

5. Так.

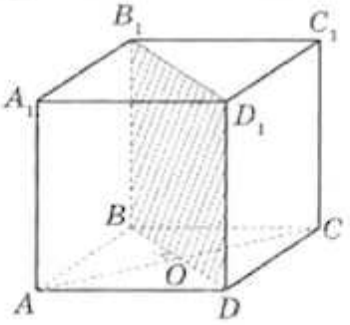
6. 1) Основою прямої призми є довільний n-кутник, основою правильної призми є правильний n-кутник.

2) Грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники, грані куба — обов'язково квадрати.

alldz.net

7. Так. Бічне ребро прямої призми перпендикулярне до площини основи, а отже, до кожної прямої, що належить цій площині, тобто і до діагоналей основи.

8. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна чотирикутна призма, основи $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — квадрати, кожне бічне ребро перпендикулярне до площини основи і є висотою призми $BB_1 \perp (ABC)$, $DD_1 \perp (ABC)$, тоді $(BB_1D) \perp (ABC)$. $AC \subset (ABC)$, $BD \subset (BB_1D)$. BD — пряма перетину площин (ABC) і (BB_1D). $AC \perp BD$ (за властивістю квадрата), тоді $AC \perp (BB_1D)$.



9. Бічна поверхня похилого паралелепіпеда складається з 4-х паралелограмів, з яких можна скласти паралелограм.

10. Бічні грані прямої чотирикутної призми — чотири попарно рівні прямокутники. Основою призми є паралелограм, сторони якого позначимо a і b, бічне ребро позначимо l. Тоді $S = P \cdot l = 2(a + b) \cdot l = 2al + 2bl$, де $2al$ і $2bl$ — суми площ протилежних бічних граней. За умовою $2al = 2bl$, $a = b$. Отже, всі сторони паралелограма основи рівні, тобто це ромб або квадрат.

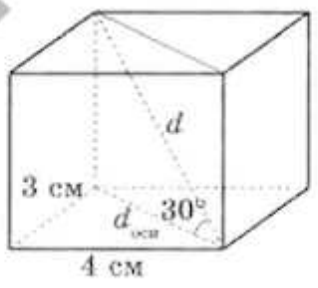
11. Див. розв'язання № 7.

Для прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b, c і діагоналлю d:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

12. 1) $d^2 = 3^2 + 4^2 + 6^2$; $d^2 = 61$; $d = \sqrt{61}$ см.

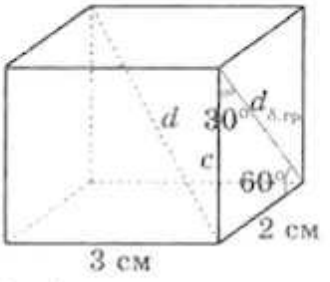
2) $d_{осн}^2 = 4^2 + 3^2$; $d_{осн} = 5$.

Кут між діагоналлю паралелепіпеда і основою — кут між цією діагоналлю та її проекцією на площину основи — діагоналлю основи.



$$d = d_{осн.} : \cos 30^\circ = 5 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3};\ d = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

3) Оскільки діагональ бічної грані утворює з меншою стороною (2 см) кут 60°, то кут проти меншої сторони 30°, тоді $d_{б.гр.} = 2 \cdot 2 = 4$ (см), а бічне ребро $c = 2\sqrt{3}$ см.



Тоді $d^2 = 2^2 + 3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$; $d^2 = 25$; $d = 5$ см.

13. $S_{б.} = P \cdot l$; $S_{б.} = (2 + 3 + 2{,}5 + 4{,}5) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$; $S_{б} = 60$ см^2.

Для призми $S_{п.п.} = S_{б.} + 2S_{осн}$.

14. За формулою $S_{п.п.} = S_{б.} + 2S_{осн}$; $S_{осн.} = S_{ромба} = 5^2 \cdot \sin 30^\circ = 25 \cdot \frac{1}{2} = 12{,}5$ (см^2);

$S_{б} = P \cdot l = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200$ (см^2); $S_{п.п.} = 200 + 2 \cdot 12{,}5 = 225$ (см^2).

Відповідь: 225 см^2.

15. Оскільки призма правильна, то основа — квадрат зі стороною 10 дм, висота є бічним ребром.

$S_{осн.} = 10^2 = 100$ (дм^2). $S_{б} = P \cdot l = 4 \cdot 10 \cdot 8 = 320$ (дм^2).

$S_{п.п.} = 320 + 2 \cdot 100 = 520$ (дм^2).

Відповідь: 520 дм^2.

alez.net

16. Нехай дана призма n-кутна, тоді основами є n-кутники; вершин — $2n$, бічних ребер — n. У кожній вершині призми сходиться 3 ребра, вони утворюють тригранний кут, отже, при верхній основі n тригранних кутів, а при обох основах $2n$ тригранних кутів. Інших тригранних кутів призма не має.
Висновок: число багатогранних кутів будь-якої призми — $2n$ — парне.

17. Якщо всього n граней, 2 грані — верхні і нижня основи, то бічних граней $n - 2$, отже, в основі призми $(n - 2)$-гранник.

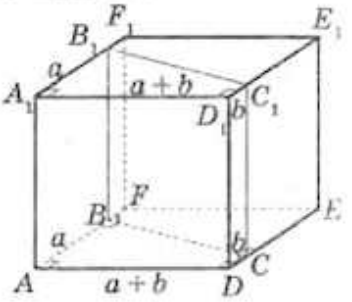
18. За означенням призми її основами є рівні n-кутники, бічні грані — паралелограми; відповідні вершини n-кутників з'єднані паралельними відрізками. У кожній вершині n-кутника сходиться 2 ребра. Нехай існує вершина, в якій сходиться 4 ребра, тоді 2 з них — ребра основи, а 2 інші — бічні ребра. Але ребра призми є паралельними, отже, перетинатися в одній точці не можуть.
Висновок: не існує вершини призми, в якій сходиться більше ніж 3 ребра.

19. За розв'язком задачі 19 §14 маємо: у кожній призмі число ребер кратне 3, 14 не кратне 3, отже, призма, що має 14 ребер, не існує.

20. Обернене твердження: якщо всі бічні грані шестикутної призми — рівні прямокутники, то призма правильна. Це твердження є хибним, бо для того, щоб шестикутник був правильний, рівності сторін недостатньо, треба мати ще й рівність внутрішніх кутів, чого задана умова не дає.

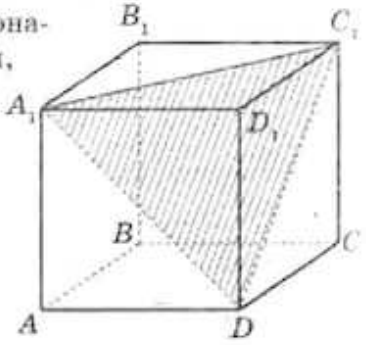
21. 1) Одну; 2) дві (обов'язково протилежні).

22. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — дана пряма призма, $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — прямокутні трапеції — основи призми; кожне бічне ребро є висотою призми.
$ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — трапеції; $AB \parallel CD$, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$;
$AD \perp AB$, $A_1D_1 \perp A_1B_1$. Позначимо $AB = a$, $CD = b$;
за умовою $AD = AB + DC = a + b$.
Добудуємо нашу призму до правильної:
$AFEDA_1F_1E_1D_1$ ($B \in AF$, $C \in DE$),
$AFED$ і $E_1F_1E_1D_1$ — квадрати,
$AF = FE = ED = AD = a + b$,
$BF = AF - AB = a + b - a = b$.
$CE = DE - DC = a + b - b = a$.



За властивістю прямої призми: $BF = B_1F_1 = b$; $CE = CE_1 = a$; $FE = F_1E_1 = a + b$; $AF \parallel DC$, BC — січна, тоді $\angle ABC = \angle ECB$; $\angle FBC = \angle DCB$ (як внутрішні різносторонні), отже, $ABCD = ECBF$, аналогічно $A_1B_1C_1D_1 = E_1C_1B_1F_1$, тому призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює призмі $ACBFE_1C_1B_1F_1$.
Висновок: з двох однакових призм із заданими умовами можна скласти правильну призму.

23. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний куб, ΔA_1C_1D — переріз,
$S_{\Delta A_1C_1D} = 18\sqrt{3}$ (см^2). Оскільки сторони ΔA_1C_1D є діагоналями граней куба, то цей трикутник є рівностороннім,



$$S_{\Delta A_1C_1D} = \frac{A_1C_1^2\sqrt{3}}{4};\quad \frac{A_1C_1^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3};\quad A_1C_1^2 = 18 \cdot 4;$$

$$A_1C_1 = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2} = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Сторона квадрата $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$ (см).

Відповідь: ребро куба 6 см.

24. Якщо призма пряма, то кожне її бічне ребро є висотою.
Для правильного трикутника:

alaz.net

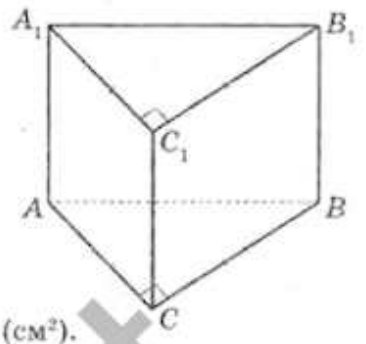
$S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де a — сторона трикутника. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$; $\frac{a^2}{4} = 9$; $a^2 = 9 \cdot 4$;

$a = 6$ см — сторона основи призми. За умовою $H = 3a$; $H = 18$ см — висота.

$S_б = P \cdot l$, $l = H$; $P = 3a$; $S_б = 3 \cdot 6 \cdot 18 = 324$ (см^2).

Відповідь: 324 см^2.

25. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана пряма призма; ΔABC — рівнобедрений, прямокутний — основа; кожне бічне ребро є висотою.



За умовою $S_{\Delta ABC} = 18$ см^2, $H = 2 - \sqrt{2}$ см.

У ΔABC: $AC = BC$, $\angle C = 90°$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AC^2 = 18$;

$AC^2 = 36$; $AC = 6$ см $= BC$. $AB = AC\sqrt{2}$; $AB = 6\sqrt{2}$ см.

$S_б = P \cdot l$, $l = H$;

$P_{\Delta ABC} = 2AC + AB = 2 \cdot 6 + 6\sqrt{2} = 6\left(2 + \sqrt{2}\right)$ (см).

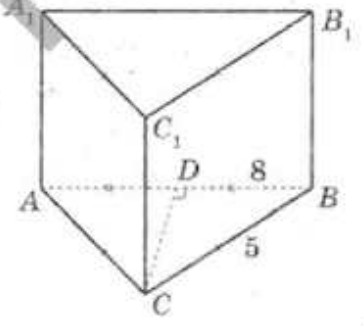
$S_б = 6 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\right) = 6 \cdot \left(2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = 6 \cdot (4 - 2) = 12$ (см^2).

Відповідь: $S_б = 12$ см^2.

26. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана пряма призма; ΔABC — рівнобедрений, є основою; кожне бічне ребро є висотою.

У ΔABC: $AB = 8$ см — основа; $AC = BC = 5$ см; CD — висота трикутника, яка є медіаною, $AD = DB = 4$ см.

У ΔBCD: $\angle D = 90°$; $BC = 5$ см, $DB = 4$ см, отже, $CD = 3$ см (єгипетський трикутник).



$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ (см^2).

За умовою $H = CD = 3$ см.

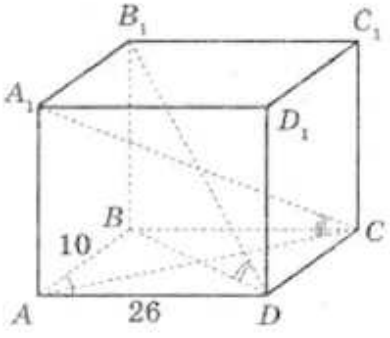
$S_б = P \cdot l$, $l = H$;

$P = 2 \cdot AC + AB = 2 \cdot 5 + 8 = 18$ (см);

$S = 18 \cdot 3 = 54$ (см^2).

Відповідь: 54 см^2.

27. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямий паралелепіпед, основа — паралелограм $ABCD$; $AD = 26$ см, $AB = 10$ см, $\sin\angle A = \frac{5}{13}$.



$S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin A = 26 \cdot 10 \cdot \frac{5}{13} = 100$ (см^2).

Кожне бічне ребро є висотою. За умовою діагональ паралелепіпеда утворює з площиною кут 45° — це кут між діагоналлю та її проекцією на площину основи.

Розглянемо діагональ B_1D: її проекцією на площину основи є діагональ паралелограма BD; $\angle BDB_1 = 45°$.

У ΔABD за теоремою косинусів: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle A$. Оскільки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ (α — гострий кут).

Тоді $BD^2 = 26^2 + 10^2 - 2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot \frac{12}{13}$; $BD^2 = 676 + 100 - 480 = 296$;

$BD = \sqrt{4 \cdot 74} = 2\sqrt{74}$ (см).

alldz.net

У ΔB_1BD: $\angle B = 90°$; $\angle D = 45°$, тоді $\angle B_1 = 45°$; $B_1B = BD = 2\sqrt{74}$ см.

$S_б = P \cdot l$; $l = H = B_1B = 2\sqrt{74}$ см; $S_б = 2 \cdot (10 + 26) \cdot 2\sqrt{74} = 144\sqrt{74}$ (см²).

Розглянемо діагональ A_1C: її проекцією на площину основи є діагональ паралелограма AC; $\angle ACA_1 = 45°$.

У ΔABC за теоремою косинусів: $AC^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\beta$. Оскільки обирали $\angle A$ — гострий кут, то $\angle B$ — тупий, $\cos\angle B = -\frac{12}{13}$.

Тоді $AC^2 = 26^2 + 10^2 + 2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot \frac{12}{13}$; $AC^2 = 676 + 100 + 480 = 1256$;

$AC = \sqrt{4 \cdot 314} = 2\sqrt{314}$ (см).

У ΔA_1AC: $\angle A = 90°$; $\angle C = 45°$, тоді $\angle A_1 = 45°$; $AA_1 = AC = 2\sqrt{314}$ см; $S_б = P \cdot l$;

$l = H = A_1A = 2\sqrt{314}$ см. $S_б = 2 \cdot (10 + 26) \cdot 2\sqrt{314} = 144\sqrt{314}$ (см²).

Відповідь: $144\sqrt{74}$ см² або $144\sqrt{314}$ см².

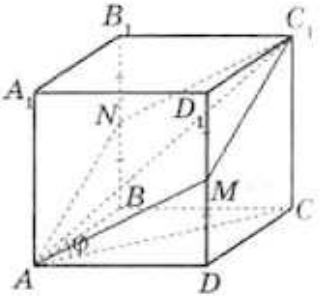
28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M — середина D_1D;

(AMC_1) — переріз куба. $S_{(AMC_1)} = 50\sqrt{6}$ см².

Площина, що перетинає паралельні площини, перетинає їх по паралельних прямих, тому виконаємо паралельне перенесення відрізків AM і MC_1 на вектори $\overrightarrow{MC_1}$ і $\overrightarrow{MA}$, отримаємо відрізки NC_1 і AN, причому N — середина BB_1.

Оскільки $\Delta ADM = \Delta C_1D_1M = \Delta ABN = \Delta C_1B_1N$ як прямокутні за двома катетами, то отриманий переріз — ромб AMC_1N, $S_{AMC_1N} = 50\sqrt{6}$ см².

Квадрат $ABCD$ є ортогональною проекцією ромба ANC_1M на площину основи, тоді $S_{ABCD} = S_{AMC_1N} \cdot \cos\varphi$, де φ — кут між діагоналями C_1A і CA ($C_1A \perp NM$; $CA \perp BD$; $NM \parallel BD$).



Нехай ребро куба a, тоді $AC = a\sqrt{2}$; $AC_1 = a\sqrt{3}$.

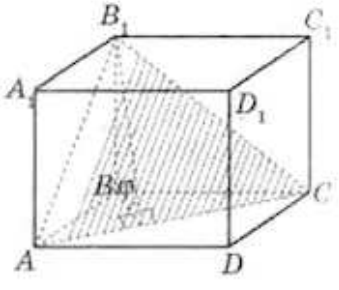
У ΔACC_1: $\angle C = 90°$; $\cos\varphi = \frac{AC}{AC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Тоді $S_{ABCD} = 50\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 50 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 2}{3}} = 50 \cdot 2 = 100$ (см²),

звідки ребро куба $\sqrt{100} = 10$ (см).

Відповідь: 10 см.

29. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний прямокутний паралелепіпед. Площина, що проходить через точки A, B_1, C, — утворений переріз, прямі перетину перерізу і граней паралелепіпеда — діагоналі граней; φ — кут між площиною перерізу і площиною основи; $\cos\varphi = \frac{1}{8}$. Усі грані паралелепіпеда — прямокутники, сторони основи 5 м і 3 м.



Трикутник ABC є ортогональною проекцією ΔAB_1C на площину основи, тоді

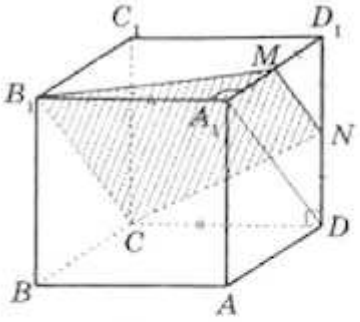
$S_{ABC} = S_{AB_1C} \cdot \cos\varphi$; $S_{AB_1C} = \frac{S_{ABC}}{\cos\varphi}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7{,}5$ (см²).

$S_{AB_1C} = \frac{7{,}5}{\frac{1}{8}} = 7{,}5 \cdot 8 = 60$ (см²).

Відповідь: 60 см².

alldz.net

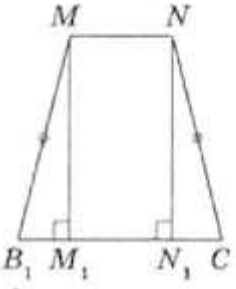
30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб; M і N — середини A_1D_1 і D_1D відповідно. Через точки M, N і B_1 проведено площину. Ребро куба $a = 4\sqrt{5}$ см. Площина перерізу перетинає паралельні площини (ADD_1) і (BCC_1) по паралельних прямих. M і N — середини A_1D_1 і D_1D, отже, MN — середня лінія ΔA_1DD_1, $MN \parallel A_1D$; $B_1C \parallel A_1D$ за властивістю куба, отже, $MN \parallel B_1C$, тоді B_1C — пряма перетину (BCC_1) і площини перерізу. Маємо: $MNCB_1$ — утворений переріз — рівнобічна трапеція ($BM = CN$ як гіпотенузи рівних прямокутних трикутників B_1A_1M і CDN) з основами $MN \parallel B_1C$, $MN = \frac{1}{2}B_1C$. $B_1C = a\sqrt{2} = 4\sqrt{10}$ (см);



$MN = 2\sqrt{10}$ (см).

З ΔB_1A_1M: $\angle A_1 = 90°$; $B_1A_1 = a$,

$A_1M = \frac{1}{2}a$; $B_1M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $B_1M = CN = 10$ (см).



Для трапеції B_1MNC: $MM_1 \perp B_1C$, MM_1 — висота;

$B_1M_1 = \frac{1}{2}(B_1C - MN) = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{10} - 2\sqrt{10}\right) = \sqrt{10}$ (см).

У ΔB_1MM_1: $\angle M_1 = 90°$; $MM_1^2 = B_1M^2 - B_1M_1^2$; $MM_1^2 = 10^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2 = 90$;

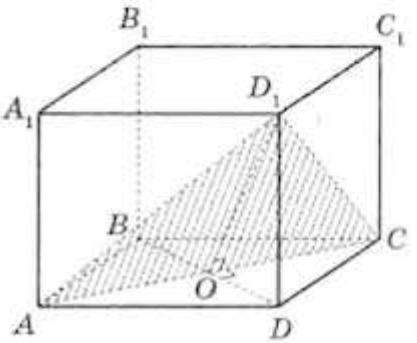
$MM_1 = 3\sqrt{10}$ см. $S_{B_1MNC} = \frac{1}{2}(B_1C + MN) \cdot MM_1$;

$S_{B_1MNC} = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{10} + 2\sqrt{10}\right) \cdot 3\sqrt{10} = 90$ (см^2).

Відповідь: 90 см^2.

31. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна чотирикутна призма, $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — квадрати зі стороною 4 см — основи призми; кожне бічне ребро є висотою призми, (ACD_1) — площина перерізу, утворює з площиною основи кут 60°.

$DD_1 \perp (ADC)$, $BD \perp AC$ (як діагоналі квадрата), тому $DO \perp AC$; D_1O — похила, D_1O — проекція, отже, $DP \perp AC$ (за теоремою про три перпендикуляри), тому $\angle DOD_1$ — лінійний кут двогранного кута між (ADC) і (AD_1C), $\angle DOD_1 = 60°$.



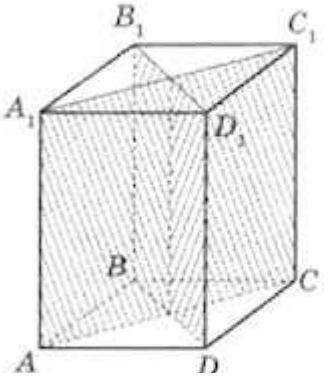
ΔADC є ортогональною проекцією ΔAD_1C на (ADC), тоді $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta AD_1C} \cdot \cos\varphi = S_{\Delta AD_1C} \cdot \cos 60°$;

$S_{\Delta AD_1C} = \frac{S_{\Delta ADC}}{\cos 60°}$; $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$ (см^2).

$S_{\Delta AD_1C} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$ (см^2).

Відповідь: 16 см^2.

32. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — пряма призма, $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — ромби, є основами призми; кожне бічне ребро є висотою призми. Діагональні перерізи — прямокутники AA_1C_1C і BB_1D_1D, $S_{AA_1C_1C} = 4$ см^2; $S_{BB_1D_1D} = 3$ см^2. Позначимо висоту призми H, сторону ромба a, діагоналі ромба $d_1 = AC$, $d_2 = BD$, тоді



$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ (за властивістю ромба).

alloz.net

29*

$S_{AA_1C_1C} = d_1 \cdot H$; $d_1 = \frac{4}{H}$; $S_{BB_1D_1D} = d_2 \cdot H$; $d_2 = \frac{3}{H}$.

Тоді $a^2 = \left(\frac{4}{2H}\right)^2 + \left(\frac{3}{2H}\right)^2 = \frac{4^2+3^2}{4H^2} = \frac{25}{4H^2}$; $a = \sqrt{\frac{25}{4H^2}} = \frac{5}{2H}$.

$S_б = P \cdot l$, $l = H$; $S_б = 4a \cdot H$; $S_б = 4 \cdot \frac{5}{2H} \cdot H = 10$ (см²).

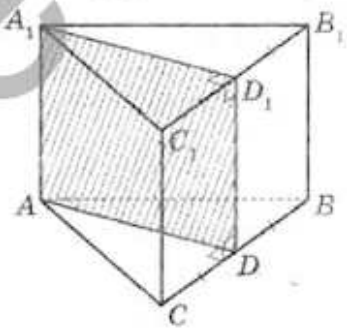
Відповідь: 10 см².

33. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна призма; ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні зі стороною $\sqrt[4]{3}$ м — основи призми; кожне бічне ребро є висотою. Площина перерізу проходить через бічне ребро AA_1 перпендикулярно площині BB_1C_1C. Позначимо середини відрізків BC і B_1C_1 — D і D_1 відповідно. Оскільки BB_1C_1C — прямокутник, то $DD_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $DD_1 \perp BC$, $DD_1 \perp B_1C_1$. Для ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ медіани AD і A_1D_1 є висотами, отже, $AD \perp BC$, $A_1D_1 \perp B_1C_1$, тоді $BC \perp (ADD_1)$, $B_1C_1 \perp (ADD_1)$, тому $(ADD_1) \perp (BB_1C)$, значить, прямокутник ADD_1A_1 — даний переріз; $S_{ADD_1A_1} = \sqrt{3}$ м².

$S_{п.п.} = S_б + 2S_{осн}$. $S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}$ (м²).

У ΔABC: $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$. $S_{ADD_1A_1} = AD \cdot AA_1$;

$AA_1 = \frac{S_{ADD_1A_1}}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ (м²); $H = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ м.



$S_б = P \cdot l$, $l = H$; $S_б = 3 \cdot a \cdot H = 3 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = 6$ (м²).

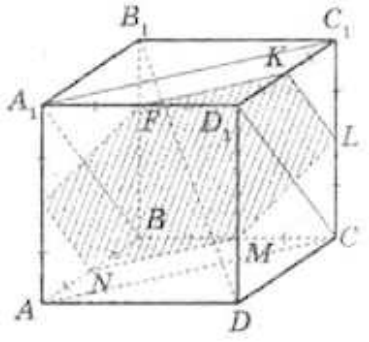
$S_{п.п.} = 6 + 2 \cdot \frac{3}{4} = 6 + 1{,}5 = 7{,}5$ (м²).

Відповідь: 7,5 м².

34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний куб з ребром a. Нехай φ — площина, перпендикулярна до діагоналі B_1D. За прикладом 6 §15, ця площина проходить через кінці трьох ребер куба, що виходять зі спільної вершини: $(BA_1C_1) \perp B_1D$ або $(AD_1C) \perp B_1D$; $\Delta BA_1C_1 = \Delta AD_1C$ як рівносторонні, сторони яких є діагоналями бічних граней куба:

$A_1C_1 = C_1B = BA_1 = AD_1 = D_1C = AC = a\sqrt{2}$.

$S_\Delta = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



Позначимо E, F, K, L, M, N — середини AA_1, A_1D_1, D_1C_1, C_1C, CB, BA відповідно, тоді $EF \parallel AD_1$,

$EF = \frac{1}{2}AD_1$; $FK \parallel A_1C_1$, $FK = \frac{1}{2}A_1C_1$; $KL \parallel D_1C$,

$KL = \frac{1}{2}D_1C$; $LM \parallel BC_1$; $LM = \frac{1}{2}BC_1$; $MN \parallel AC$;

$MN = \frac{1}{2}AC$; $EN \parallel A_1B$; $EN = \frac{1}{2}A_1B$ (як середні лінії ΔAA_1D_1; $\Delta A_1C_1D_1$; ΔD_1C_1C; ΔBC_1C; ΔABC; ΔAA_1B відповідно), звідси:

$EF = FK = KL = LM = NM = EN = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $EF \parallel ML$; $FK \parallel NM$; $KL \parallel EN$, тобто

$EFKLMN$ — правильний шестикутник,

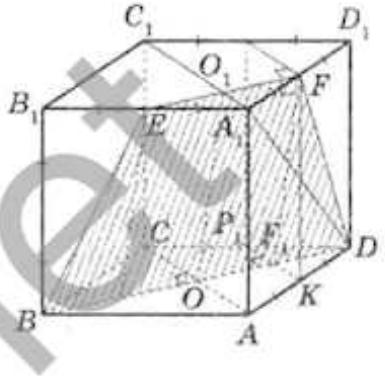
gdz.net

$$S_{EFKLMN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{a^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{4 \cdot 4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4};\quad \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} > \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Оскільки $A_1C_1 \parallel FK$, $C_1B \parallel LM$, то $(A_1C_1B) \parallel (FKM)$, тобто $(FKM) \perp B_1C$, то площина шестикутника перпендикулярна до діагоналі, його площа є більшою.

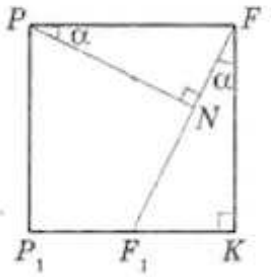
Відповідь: $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

35. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, E і P — середини ребер A_1B_1 і C_1D_1 відповідно; (EBD) — площина перерізу, площина, що перетинає паралельні площини, перетинає їх по паралельних прямих, $BD \parallel B_1D_1$; F — середина A_1D_1; $EF \parallel B_1D_1$ (як середня лінія $\Delta A_1B_1D_1$), $EF \parallel BD$, тоді $BEFD$ — даний переріз — рівнобічна трапеція ($BE = DF$ як гіпотенузи прямокутних трикутників $\Delta BB_1E = \Delta DD_1F$). Ребро куба a; $BD = a\sqrt{2}$; $EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Проведемо висоту трапеції FF_1, $FF_1 \perp BD$, $FF_1 \perp EF$, $EF \perp PE$ (за властивістю квадрата); $EF \perp FF_1$, тоді $EF \perp (PFF_1)$, $EF \subset (BED)$, тоді $(BED) \perp (PFF_1)$. У площині (PFF_1) проведемо $PN \perp FF_1$, тоді $PN \perp (BED)$. PN — шукана відстань. K — точка перетину P_1F_1 і AD. Розглянемо прямокутник $PFKP_1$ ($PP_1 \parallel DD_1 \parallel FK$, отже, $PP_1 \parallel (A_1B_1C_1)$, $PP_1 \perp (ABC)$).

F_1 — середина P_1K; $PP_1 = FK = a$;



$PF = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $P_1F_1 = F_1K = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $PN \perp FF_1$;

позначимо $\angle NPF = \alpha$, $\angle F = 90°$, тоді $\angle F_1FK = \alpha$.

У ΔF_1KF: $\angle K = 90°$; $FF_1^2 = F_1K^2 + FK^2$;

$$FF_1^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{8};\quad FF_1 = \frac{3a}{\sqrt{8}},\quad \cos\alpha = \frac{FK}{FF_1} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

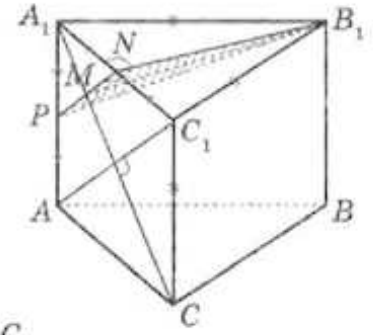
У ΔPFN: $\angle N = 90°$; $PN = PF \cdot \cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{a \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}a$.

Відповідь: $\frac{2}{3}a$.

36. $ABCA_1B_1C_1$ — дана правильна трикутна призма, ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні, кожне бічне ребро є висотою.

1) $|AB| = |AA_1| = a$, тобто всі бічні грані — квадрати зі стороною a.

$(A_1B_1C_1) \parallel (AA_1C)$.



Проведемо $B_1N \perp A_1C_1$, оскільки $\Delta A_1B_1C_1$ рівносторонній, то B_1N — висота і медіана, отже, N — середина A_1C_1; $B_1N \subset (A_1B_1C_1)$. $B_1N \perp (AA_1C)$, тому $B_1N \perp A_1C$.

$AC_1 \perp A_1C$ як діагоналі квадрата AA_1C_1C.

P — середина AA_1; $PN \parallel AC_1$; $PN = \frac{1}{2}AC_1$, тоді $PN \perp A_1C$.

Маємо: $A_1C \perp PN$, $A_1C \perp B_1N$, отже, $A_1C \perp (PNB_1)$, ΔPNB_1 — шуканий переріз.

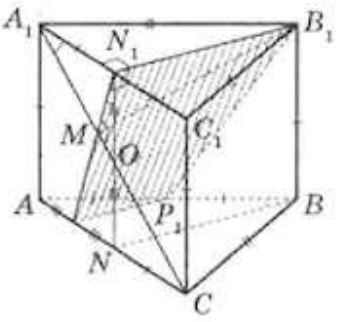
У ΔPNB_1: $\angle N = 90°$ ($B_1N \perp (AA_1C)$), $PN \subset (AA_1C)$, $B_1N \perp PN$); $B_1N = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

aldz.net

(як висота $\Delta A_1B_1C_1$), $PN = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (половина діагоналі квадрата),

$S_{\Delta PNB_1} = \frac{1}{2}B_1N \cdot PN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$.

2) $|AB| = 2a$, $|AA_1| = a$. $(A_1B_1C_1) \perp (AA_1C)$.



Проведемо $B_1N_1 \perp A_1C$, оскільки ΔA_1B_1C рівносторонній, то B_1N_1 — висота і медіана, отже, N_1 — середина A_1C_1; $B_1N_1 \subset (A_1B_1C_1)$, $B_1N_1 \perp (AA_1C)$, тому $B_1N_1 \perp A_1C$.

N — середина AC, тоді $NN_1 \parallel AA_1 \parallel CC_1$,

$NN_1 = AA_1 = a$.

O — точка перетину A_1C і NN; $NN_1 \perp A_1C_1$;

O — середина A_1C; $ON_1 = ON = \frac{a}{2}$.

P — середина AN; M — точка перетину A_1C і PN_1.

$\Delta PN_1N = \Delta OAN_1$ і $\angle N = \angle N_1 = 90°$; $A_1N_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$; $NN_1 = a = A_1N_1$;

$PN = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}a = ON_1$; звідси $\angle N_1 = \angle A = \alpha$, тоді $\angle MN_1A = 90° - \alpha$.

У ΔA_1N_1M: $\angle A_1 = \alpha$, $\angle N_1 = 90° - \alpha$, отже, $\angle M = 90°$, тобто $A_1C \perp PN_1$.

Маємо: $B_1N_1 \perp A_1C$; $PN_1 \perp A_1C$, отже, $A_1C \perp (PN_1B_1)$, площина (PN_1B_1) перетинає паралельні площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ по паралельних прямих; P — точка перетину (PN_1B_1) і AB. $N_1B_1 \parallel NB$; $PP_1 \parallel N_1B_1$, тоді $PP_1 \parallel NB$, P — середина AN, тому P_1 — середина AB, отже, $PN_1B_1P_1$ — шуканий переріз. Оскільки $N_1B_1 \parallel PP_1$, $B_1N_1 \perp (A_1C_1C)$, то $B_1N_1 \perp PN_1$, отже, переріз — прямокутна трапеція, бічне ребро PN_1 є висотою.

$N_1B_1 = a\sqrt{3}$ (з рівностороннього $\Delta A_1B_1C_1$).

$PP_1 = \frac{1}{2}NB = \frac{1}{2}N_1B_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (як середня лінія ΔANB).

З ΔPNN_1: $\angle N = 90°$; $NN_1 = a$; $PN = \frac{a}{2}$; $PN_1^2 = PN^2 + NN_1^2$;

$PN_1^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$; $PN_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$S_{PN_1B_1P_1} = \frac{1}{2}(PP_1 + N_1B_1) \cdot PN_1$;

$S_{PN_1B_1P_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + a\sqrt{3}\right) \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{8}$.

Відповідь: $\frac{3a^2\sqrt{15}}{8}$.

37. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — дана правильна чотирикутна призма, $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — квадрати зі стороною a — основи призми, кожне бічне ребро є висотою.

O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$; $AC \perp BD$. $AA_1 \perp (ABC)$, $AO \perp BD$, A_1O — похила, AO — проекція, тоді $A_1O \perp BD$ (за теоремою про три перпендикуляри), отже, $BD \perp (AOA_1)$, $BD \subset (A_1BD)$, звідси $(A_1BD) \perp (AOA_1)$.

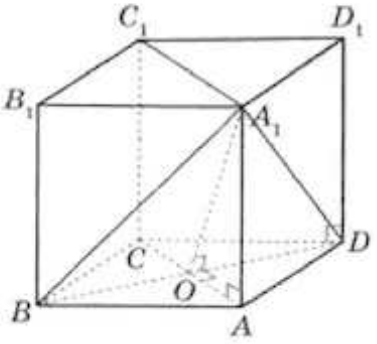
$(AOA_1) = (AC_1A_1)$ — діагональний переріз призми.

У площині (AC_1A_1) через точку C_1 проводимо $C_1N \perp A_1O$, тоді $C_1N \perp (A_1BD)$; C_1N — шукана відстань.

aldz.net

1) Бічне ребро $a\sqrt{2}$: $AA_1 = CC_1 = a\sqrt{2}$;

$AC = A_1C_1 = a\sqrt{2}$ (за властивістю квадрата).



$AO = CO = \frac{1}{2}C = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

У ΔAOA_1: $\angle A = 90°$; $A_1O^2 = AO^2 + AA_1^2$;

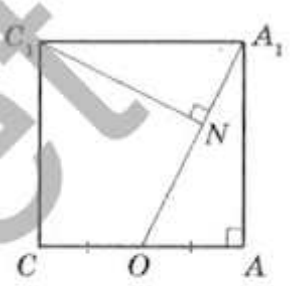
$A_1O^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$; $A_1O^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2}$;

$AO_1 = a\sqrt{\frac{5}{2}}$; $\angle OA_1A = \alpha$; $\cos\alpha = \frac{AA_1}{A_1O}$; $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

У ΔA_1C_1N: $\angle N = 90°$; $\angle NA_1C = 90° - \alpha$, отже, $\angle C_1 = \alpha$; $C_1N = A_1C_1 \cdot \cos\alpha$;

$C_1N = a\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2a\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}a\sqrt{10} = 0,4a\sqrt{10}$.

2) Бічне ребро $0,5a\sqrt{2}$: $AA_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;



$AC = A_1C_1 = a\sqrt{2}$; $AO = CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

У ΔAOA_1: $\angle A = 90°$; $A_1O^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$;

$A_1O = a$, тобто $\angle A_1 = \angle O = 45°$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

У ΔA_1C_1N: $\angle N = 90°$; $\angle C_1 = \angle A_1 = 45°$; $C_1N = C_1A_1 \cdot \cos 45°$; $C_1N = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$

(точка N співпадає з точкою O).

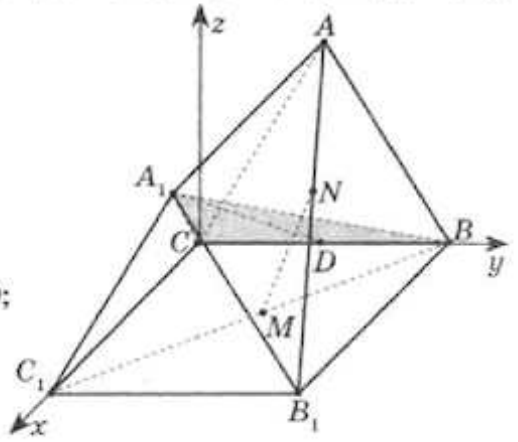
Відповідь: 1) $0,4a\sqrt{10}$; 2) a.

38. $ABCA_1B_1C_1$ — дана правильна призма, основи — ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні; кожне бічне ребро є висотою; кожне ребро дорівнює a; $M \in BC_1$, $N \in AB_1$, $MN \perp (BAC)$.

Позначимо D — середину BC, тоді в ΔBA_1C медіана A_1D є висотою ($A_1C = A_1B$ як діагоналі рівних квадратів AA_1C_1C і AA_1B_1B). $A_1D = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Введемо прямокутну систему координат так, що точка C співпадає з початком координат, вісь Ox спрямуємо вздовж ребра CC_1, вісь Oy вздовж ребра CB, вісь Oz так, що $Oz \perp (C_1CB)$. Тоді $C(0; 0; 0)$, $C_1(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $B_1(a; a; 0)$,

$A\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_1\left(a; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$,



$\overrightarrow{DA_1}\left(a; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Оскільки $MN \perp (BA_1C)$, то

$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DA_1}$; $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0$.

Нехай $\overrightarrow{MN}(x; y; z)$, тоді $ax + 0 \cdot y + \frac{a\sqrt{3}}{2}z = 0$;

$ax + \frac{a\sqrt{3}}{2}z = 0$; $x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$; $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}z$.

alDz.net

Рівняння AB_1: $x = 2y - a = a - \frac{2z}{\sqrt{3}}$; $N \in AB_1$; $N(x_N; y_N; z_N)$.

Рівняння BC_1: $x - a = -y$; $M \in BC_1$; $M(x_M; y_M; z_M)$;

$\overrightarrow{MN}(x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$; $x_N = 2y_N - a = a - \frac{2z_N}{\sqrt{3}}$; $x_M - a = -y_M$,

тоді $\overrightarrow{MN} = \left(x_N - x_M; \frac{x_N + a}{2} + (x_M - a); \frac{(a - x_N)\sqrt{3}}{2} \right)$; $\frac{x_N + a}{2} + x_M - a = 0$;

$x_M = \frac{a - x_N}{2}$.

$\overrightarrow{MN} = \left(x_N - \frac{a - x_N}{2}; 0; \frac{(a - x_N)\sqrt{3}}{2} \right)$; $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3x_N - a}{2}; 0; \frac{(a - x_N)\sqrt{3}}{2} \right)$.

Оскільки $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}z$, то $\frac{3x_N - a}{2} = (a - x_N)\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$; $3x_N - a = -\frac{3}{2}(a - x_N)$;

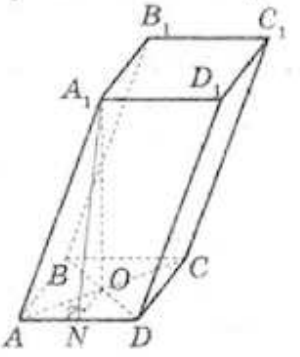
$6x_N - 2a = -3a + 3x_N$; $3x_N = -a$; $x_N = -\frac{a}{3}$.

Маємо: $\overrightarrow{MN} = \left(-a; 0; \frac{\left(a + \frac{a}{3}\right)\sqrt{3}}{2} \right)$; $\overrightarrow{MN}\left(-a; 0; \frac{2\sqrt{3}a}{3} \right)$.

$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-a)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3} \right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{3}} = \sqrt{\frac{7a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Відповідь: $MN = a\sqrt{\frac{7}{3}}$.

39. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний паралелепіпед, основи якого $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — квадрати зі стороною a, O — точка перетину діагоналей $ABCD$ — центр квадрата; точка A проектується в точку O. $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = b$. Усі бічні грані — рівні паралелограми; $S_б = 4S_{AA_1D_1D}$.



Проведемо $ON \perp AD$, $A_1O \perp (ABC)$, A_1N — похила, ON — проекція, тому $A_1N \perp AB$ (теорема про три перпендикуляри), отже, A_1N — висота грані AA_1D_1D; N — середина AD; $AN = \frac{a}{2}$.

У ΔAA_1N: $\angle N = 90°$; $A_1N^2 = AA_1^2 - AN^2$;

$A_1N^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{4b^2 - a^2}{4}$; $A_1N = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

Тоді $S_б = 4 \cdot S_{AA_1D_1D} = 4 \cdot AD \cdot A_1N = 4 \cdot a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} = 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$.

Відповідь: $2a\sqrt{4b^2 - a^2}$.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний паралелепіпед, $BD \perp MD_1$; $A_1C \perp BD$; $MD_1 \perp A_1C$; $|BD| = 2a$, $|BC| = 1{,}5a$, $|A_1C| = 4a$.

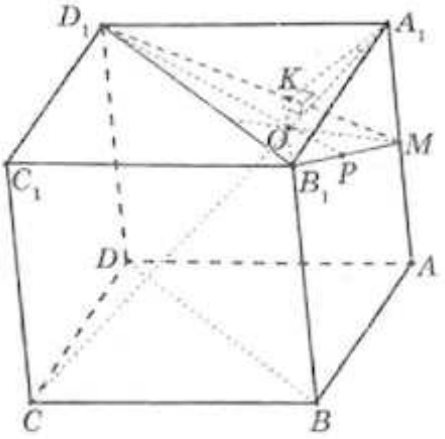
За властивістю паралелепіпеда $BD \parallel B_1D_1$, $BD = B_1D_1$. Тоді ΔMD_1B_1 — прямокутний, $\angle D_1 = 90°$.

Оскільки $A_1C \perp BD$, то $A_1C \perp B_1D_1$; $A_1C \perp MD_1$, тому $A_1C \perp (B_1D_1M)$, O — точка перетину A_1C і (B_1D_1M). За властивістю паралелепіпеда (приклад 1 §6): O — точка перетину медіан ΔB_1D_1M.

alDZ.net

$A_1O = \frac{1}{3}A_1C = \frac{4}{3}a$, $A_1O \perp (B_1D_1M)$.

$A_1D_1 = BC = 1{,}5a = \frac{3}{2}a$.



Проведемо $OK \perp MD_1$; $A_1O \perp (MB_1D_1)$, A_1K — похила, OK — проекція, тоді $A_1K \perp D_1M$; O — точка перетину медіан,

$OK = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}B_1D_1\right) = \frac{1}{3}D_1B_1 = \frac{2}{3}a$.

У ΔOKA_1: $\angle O = 90°$; $A_1K^2 = A_1O^2 + OK^2$;

$A_1K^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{20}{9}a^2$; $A_1K = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$;

$\sin\angle A_1 = \frac{OK}{KA_1}$. $\sin\angle A_1 = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{2\sqrt{5}}{3}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

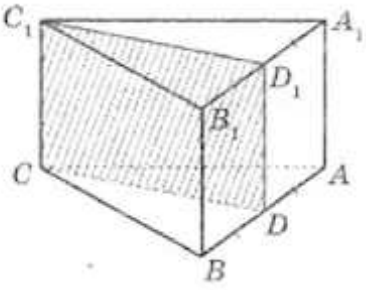
$D_1M \perp OK$; $D_1M \perp A_1K$, тому $D_1M \perp (OA_1K)$; $D_1M \subset (MA_1D_1)$, отже, (OA_1K) і (MA_1D_1), $(OA_1K) \perp (DAA_1)$, отже, площина (OA_1K) містить висоту паралелепіпеда H, тоді CA_1 — похила, пряма A_1K — проекція, $\angle OA_1K = \varphi$ — кут нахилу CA_1 до площини (DAA_1). Отже, $H = A_1C \cdot \sin\varphi = 4a \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5} = 0{,}8a\sqrt{5}$.

H — висота, проведена з вершини C до площини грані AA_1D_1D.

Відповідь: $0{,}8a\sqrt{5}$.

41. $ABCA_1B_1C_1$ — дана правильна трикутна призма, ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні — основи. Позначимо сторону основи a. Кожне бічне ребро є висотою, позначимо його b. За умовою площина φ утворює переріз призми так, що площа її поверхні поділяється навпіл.

1) φ проходить через CC_1. Проведемо переріз через CC_1 і DD_1, де D і D_1 — середини відрізків AB і A_1B_1 відповідно, тоді BB_1D_1D і AA_1D_1D — рівні прямокутники, отже, є рівновеликими.

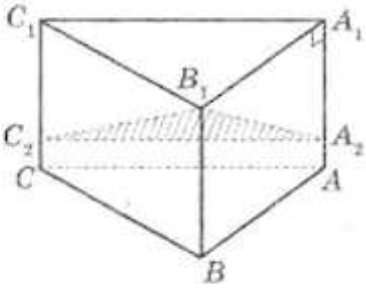


Тоді $S_{CC_1B_1D} + S_{BB_1D_1D} = S_{CC_1A_1A} + S_{AA_1D_1D} = \frac{1}{2}S_б$;

прямокутник CC_1D_1D — утворений переріз.

2) φ проходить через B_1 паралельно AC. $S_б = P \cdot l$, $l = H = b$; $P = 3a$; $S_б = 3ab$;

$\frac{1}{2}S_б = 1{,}5ab$.



Якщо відмітити точки A_2 і C_2 на ребрах AA_1 і CC_1 відповідно так, що $AA_2 : AA_1 = CC_2 : CC_1 = 1 : 4$, то $A_2C_2 \parallel AC$;

$S_{A_2A_1C_1C_2} = a \cdot \frac{3}{4}b = \frac{3}{4}ab$.

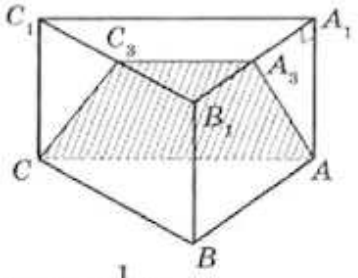
$S_{\Delta B_1C_1C_2} = S_{\Delta B_1A_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot B_1C_1 \cdot C_1C_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{4}b$;

$S_{A_2A_1C_1C_2} = S_{B_1C_1C_2} + S_{B_1A_1A_2} = \frac{3}{4}ab + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{4}b = \frac{3}{2}ab = 1{,}5ab = \frac{1}{2}S_б$;

$\Delta A_2B_1C_2$ — утворений переріз.

alok.net

3) φ проходить через AC паралельно A_1C_1. Якщо відмітити точки A_3 і C_3 на ребрах A_1B_1 і B_1C_1 відповідно так, що точки є серединами відрізків, то $A_3C_3 \parallel A_1C_1$;



$S_{AA_1C_1C} = ab$;

$$S_{\Delta C_3C_1C} = S_{\Delta A_3A_1A} = \frac{1}{2} \cdot C_1C_3 \cdot C_1C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{4} ab.$$

$$S_{AA_1C_1C} + S_{\Delta C_3C_1C} + S_{\Delta A_3A_1A} = ab + 2 \cdot \frac{1}{4} ab = ab + \frac{1}{2} ab = \frac{3}{2} ab = 1{,}5ab = \frac{1}{2} S_6.$$

Трапеція AA_3C_3C — шуканий переріз.

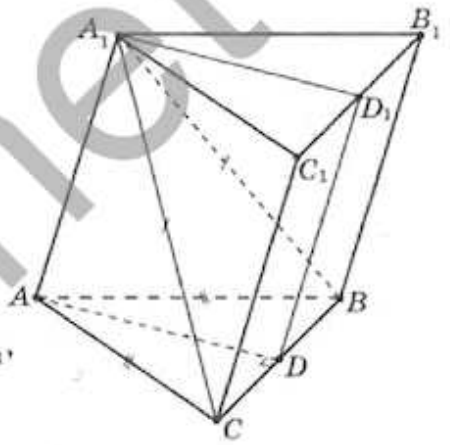
42. $ABCA_1B_1C_1$ — дана призма, в основі якої є трикутник зі сторонами: 10, 10, 12; $|AA_1| = |A_1C| = |A_1B| = 13$, $AC = BA = 10$; $CB = 12$.

$S_п = S_{AA_1C_1C} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + 2S_{\Delta ABC}$.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\left(\frac{12 + 2 \cdot 10}{2}\right) \cdot (16 - 10)^2 \cdot (16 - 12)} = \sqrt{16 \cdot 6^2 \cdot 4} = 48;$$

$$S_{\Delta ACA_1} = \sqrt{\left(\frac{13 \cdot 2 + 10}{2}\right) \cdot (18 - 13)^2 \cdot (18 - 10)} = \sqrt{18 \cdot 5^2 \cdot 8} = 60;$$

$S_{AA_1C_1C} = 2S_{\Delta ACA_1} = 2 \cdot 60 = 120.$



Оскільки $A_1C = A_1B$, то прямі A_1C і A_1B нахилені до площини основи під однаковими кутами, то проекцією бічного ребра AA_1 на (ABC) буде бісектриса $\angle CAB$ — AD, яка є висотою і медіаною рівнобедреного ΔABC, тоді ребра BB_1 і CC_1 рівновіддалені від бісектора двогранного кута призми при ребрі AA_1: (AA_1D).

DD_1 — пряма перетину з (BCC_1), $DD_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $BC \perp AD$, $BC \perp DD_1$, $BC \perp CC_1$.

CC_1B_1B — прямокутник; $S_{CC_1B_1B} = 12 \cdot 13 = 156$.

$S_п = 2 \cdot 48 + 2 \cdot 120 + 156 = 492$.

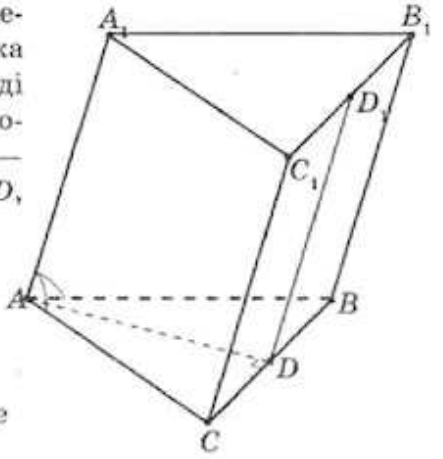
Відповідь: 492.

43. $ABCA_1B_1C_1$ — дана призма, в основі якої ΔABC;

$|AB| = |AC| = 7$, $|BC| = 6$, $|AA_1| = 10$, $\angle A_1AB = \angle A_1AC$.

$S_п = S_{AA_1C_1C} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + 2S_{\Delta ABC}$.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\left(\frac{7 \cdot 2 + 6}{2}\right) \cdot (10 - 7)^2 \cdot (10 - 6)} = \sqrt{10 \cdot 3^2 \cdot 4} = 6\sqrt{10}.$$



Оскільки $\angle A_1AB = \angle A_1AC$, то проекцією бічного ребра AA_1 на (ABC) буде бісектриса $\angle CAB$ — AD, яка є висотою і медіаною рівнобедреного ΔABC, тоді ребра BB_1 і CC_1 рівновіддалені від бісектора двогранного кута призми при ребрі AA_1: (AA_1D). DD_1 — пряма перетину з (BCC_1), $DD_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $BC \perp AD$, $BC \perp DD_1$, $BC \perp CC_1$.

CC_1B_1B — прямокутник, $S_{CC_1B_1B} = 6 \cdot 10 = 60$.

$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = AC \cdot AA_1 \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = \angle A_1AB$.

$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 70 \sin\varphi$.

При $0° < \varphi < 180°$ $0 < \sin\varphi \le 1$, отже, найбільше значення при $\varphi = 90°$, $\sin\varphi = 1$,

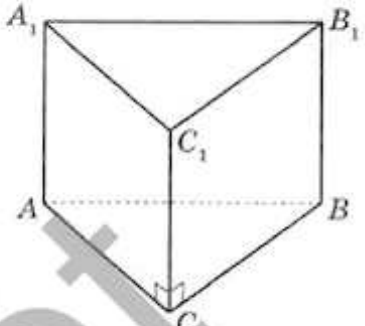
alaz.net

$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 70$. $S_п = 2 \cdot 70 + 60 + 12\sqrt{10} = 200 + 12\sqrt{10}$.

Відповідь: $200 + 12\sqrt{10}$.

44. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана пряма призма, кожне бічне ребро є висотою, основи — ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$. Бічні грані AA_1C_1C і BB_1C_1C — прямокутники — мають площі S_1 і S_2 відповідно, кут між площинами прямий.

За властивостями прямої призми: $(ABC) \perp (AA_1C_1)$; $(ABC) \perp (BB_1C_1)$, AC і BC — прямі перетину відповідно, отже, $\angle ACB = 90°$ як лінійний кут двогранного кута між площинами (AA_1C_1) і (BB_1C_1) з ребром CC_1. Позначимо бічне ребро призми H, а сторони AC — за a, BC — за b; $AB^2 = AC^2 + BC^2$(з ΔABC); $AB^2 = a^2 + b^2$; $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.



$S_{AA_1C_1C} = a \cdot H = S_1$; $a = \dfrac{S_1}{H}$;

$S_{BB_1C_1C} = b \cdot H = S_2$; $b = \dfrac{S_2}{H}$.

$AB = \sqrt{\left(\dfrac{S_1}{H}\right)^2 + \left(\dfrac{S_2}{H}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{S_1^2 + S_2^2}{H^2}} = \dfrac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{H}$;

$S_{AA_1B_1B} = AB \cdot H = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

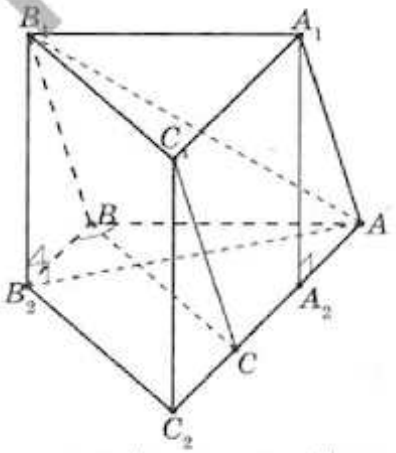
$S_{б.} = P_{осн.} \cdot l = P_{осн.} \cdot H = S_{AA_1C_1C} + S_{BB_1C_1C} + S_{AA_1B_1B}$. $S_{б.} = S_1 + S_2 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

Відповідь: $S_{б.} = S_1 + S_2 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

45. $ABCA_1B_1C_1$ — дана призма, основою якої є правильний ΔABC, $|AB| = |BC| = |AC| = 2a$; $|AB_1| = b$.

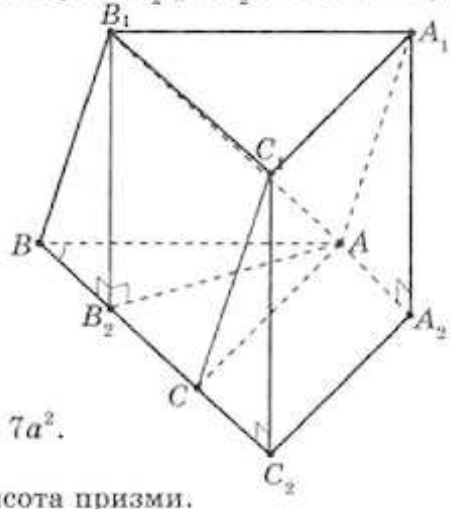
За умовою ортогональною проекцією призми на площину ABC є трапеція з бічною стороною AB, $S_{тр.} = 2S_{\Delta ABC}$. Проведемо $A_1A_2 \perp (ABC)$, $B_1B_2 \perp (ABC)$, $C_1C_2 \perp (ABC)$.

Ортогональна проекція за умовою — трапеція, отже, точки A, A_2, C, C_2 в одному випадку лежать на одній прямій, а в іншому B, B_2, C, C_2, утворені трапеції ABB_2C_2 або ABC_2A_2.



$S_{\Delta ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$; $S_{тр} = 2S_{\Delta ABC} = 2a^2\sqrt{3}$.

Оскільки за властивостями ортогонального проектування: $B_2C_2 \parallel B_1C_1$, а $B_1C_1 \parallel BC$, то $B_2C_2 \parallel BC$, $B_2C_2 = B_1C_1$, $B_1C_1 = BC$, то $B_2C_2 = BC$, тоді BCC_2B_2 — паралелограм, $\angle B_2BC = \angle BCA = 60°$ (як внутрішні різносторонні при $BB_2 \parallel AC_2$ і січній BC). $\angle B_2BA = 2 \cdot 60° = 120°$.



$S_{тр} = S_{\Delta ABC} + S_{BCC_2B_2}$;

$S_{BCC_2B_2} = 2a^2\sqrt{3} - a^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.

$S_{BCC_2B_2} = BB_2 \cdot BC \cdot \sin 60°$;

$BB_2 \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$; $BB_2 = a$.

У ΔBAB_2 за теоремою косинусів:

$AB^2 = AB^2 + BB_2^2 - 2AB \cdot BB_2 \cdot \cos 120°$.

$AB^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4a^2 + a^2 + 2a^2 = 7a^2$.

Оскільки $B_1B_2 \perp (ABC)$, то $B_1B_2 \perp B_2A$, B_1B_2 — висота призми.

ridx.net

У ΔB_1B_2A: $\angle B_2 = 90°$: $B_1B_2^2 = B_1A^2 - B_2A^2$; $B_1B_2^2 = b^2 - 7a^2$; $B_1B_2 = \sqrt{b^2 - 7a^2}$.
Міркуючи аналогічно, у другому випадку маємо: $B_1B_2 \perp BC$, $B_1B_2 \perp (ABC)$, $B_1B_2 \perp AB_2$, тоді AB_2 — висота, медіана ΔABC, $BB_2 = a$, $B_2A = a\sqrt{3}$; в ΔB_1AB_2: $B_1B_2^2 = B_1A^2 - B_2A^2$; $B_1B_2^2 = b^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2$; $B_1B_2 = \sqrt{b^2 - 3a^2}$.

Відповідь: $\sqrt{b^2 - 7a^2}$ або $\sqrt{b^2 - 3a^2}$.

§ 16. Властивості піраміди

Загальні властивості піраміди:
— усі бічні грані — трикутники;
— n-кутна піраміда має $n + 1$ вершин, $n + 1$ граней, $2n$ ребер.

Завдання 13

1. 1) Ні, ребер $2n \neq 13$.
2) 12 ребер, тобто $12 : 2 = 6$ вершин, $6 + 1 = 7$ граней; ні.

2. Усі бічні грані правильної піраміди — рівнобедрені трикутники. У трикутнику зі стороною 5 см і основою 6 см висота $5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$, $h = 4$ см — апофема, $S_{б.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 72$ (см^2).

Відповідь: 72 см^2.

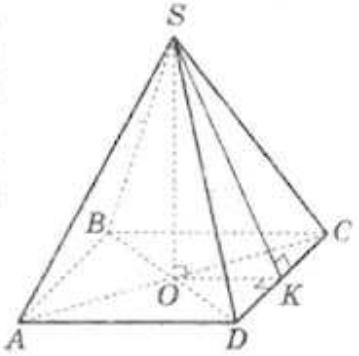
3. Правильний тетраедр містить 4 грані — правильні рівні трикутники,

$S_п = 4 \cdot S_\Delta = 16\sqrt{3}$; $4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$; $a^2 = 16$; $a = 4$, $a > 0$,

де a — ребро тетраедра.
Відповідь: 4 см.

Для правильної піраміди: $S_{б.} = \frac{P}{2} \cdot h$, h — апофема.
Для піраміди: $S_п = S_б + S_{осн.}$.

4. Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, основа — квадрат $ABCD$ зі стороною 4 см. Висота піраміди SO, де O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$; $SO = 6$ см.



K — середина CD, SK — апофема, OK — радіус кола, вписаного в квадрат $ABCD$, $OK \perp CD$, $SK \perp CD$;

$OK = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (см).

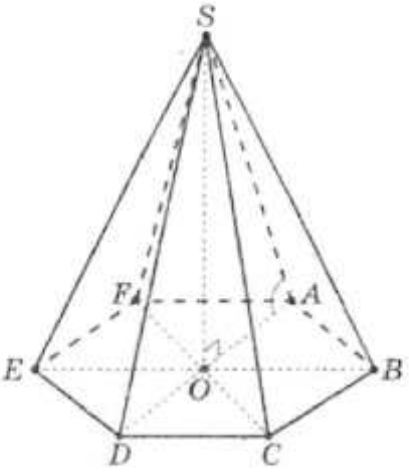
У ΔSOK $(\angle O = 90)$ $SK^2 = SO^2 + OK^2$;
$SK^2 = 6^2 + 2^2 = 40$; $SK = 2\sqrt{10}$ (см).

$S_п = S_б + S_{осн} = \frac{1}{2} P \cdot h + a^2 = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 4) \cdot 2\sqrt{10} + 4^2 = 16 + 16\sqrt{10}$ (см^2).

Відповідь: $S_п = 16 + 16\sqrt{10}$ см^2.

alldz.net

5. Нехай $SABCDEF$ — правильна шестикутна піраміда, основа — правильний шестикутник. Висота піраміди SO, де O — точка перетину діагоналей шестикутника. Кожне бічне ребро 1 м і утворює кут 45° з основою. $SO \perp (ABC)$, SA — похила, OA — проекція, $\angle SAO = 45°$ — як кут між бічним ребром і площиною основи.



У ΔSOA: $\angle O = 90°$, $\angle A = 45°$, отже, $\angle S = 45°$;

$$AO = SO = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (м)}.$$

У правильному шестикутнику $AO = AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (м).

Відповідь: $0,5\sqrt{2}$ м.

6. Див. рис. до № 4. Нехай $SABCD$ — дана правильна чотирикутна піраміда, квадрат $ABCD$ — основа, SO — висота піраміди, O — точка перетину діагоналей квадрата, $SO = 3$ см. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45°. Проведемо $SK \perp DC$, SK — апофема, K — середина CD, OK — радіус вписаного в квадрат кола, $OK \perp DC$, тоді $\angle SKO = 45°$ — як лінійний кут двогранного кута між (DSC) і (ABC).

У ΔSKO: $\angle O = 90°$, $\angle K = 45°$, тоді $\angle S = 45°$; $OK = OS = 3$ см; $DC = 2OK = 6$ см.

Відповідь: 6 см.

7. Аналогічно до задачі 6: $\angle SKO = 60°$; $S_{ABCD} = 16$ см^2; $a = 4$ см (сторона квадрата);

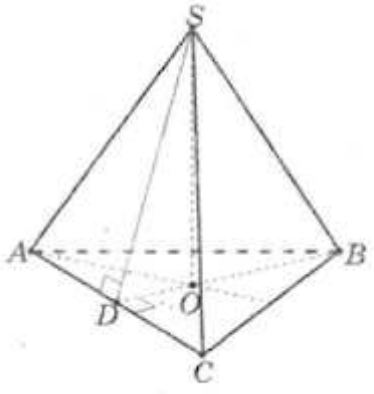
$$OK = \frac{1}{2}a = 2 \text{ м}.$$

У ΔSKO: $\angle O = 90°$, $\angle K = 60°$, $\angle S = 30°$, тому $SK = 2OK$; $SK = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

Відповідь: 4 см.

9. Нехай $SABCD$ — правильна трикутна піраміда, правильний трикутник ABC — основа, SO — висота піраміди, O — центр ΔABC. Двогранний кут при ребрі основи 30°. BD — висота, медіана, бісектриса ΔABC ($O \in BD$), $SO \perp (ABC)$, $CD \perp AC$, $OD \perp AC$ (апофема), тоді $\angle SDO = 30°$ як лінійний кут двогранного кута при ребрі основи.

Позначимо сторону основи a, тоді $AD = DC = \frac{a}{2}$;



$$BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

У ΔSOD: $\angle O = 90°$; $\angle D = 30°$;

$$SD = \frac{DO}{\cos 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{3};$$

$$SO = DO \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{a}{6}.$$

1) Плоский кут при вершині: $\angle ASC$, оскільки D — середина AC, то SD — висота, медіана, бісектриса ΔASC; $\angle ASD = \alpha$; $\angle ASC = 2\alpha$.

У ΔASD: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{SD}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{3}} = \frac{3}{2} = 1,5$; $\alpha = \operatorname{arctg} 1,5$; $\angle ASC = 2 \operatorname{arctg} 1,5$.

2) $SO \perp (ABC)$, SA — похила, OA — проекція, тоді $\angle SAO = \angle(SA; (ABC))$.

$$AO = BO = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad SO = \frac{a}{6}.$$

alex.net

У ΔASO: $\angle O = 90°$; $\angle SAO = \beta$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{SO}{AO}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\frac{a}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

$\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Відповідь: 1) $2\operatorname{arctg}1{,}5$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

10. Див. рис. і позначення до № 9: $SD = 6$ см; $OD = \sqrt{3}$ см (радіус кола, вписаного в основу); $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$; $a = 6$ см — сторона трикутника.

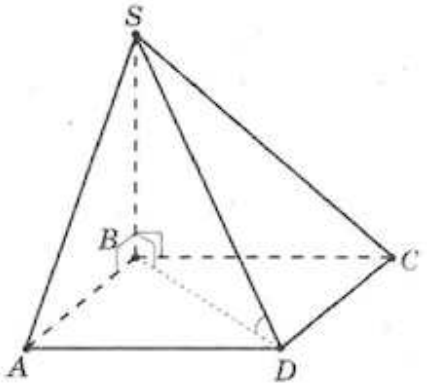
$S_{б.} = \dfrac{1}{2}P \cdot h$; $S_{б.} = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = 54$ (см^2).

Відповідь: 54 см^2.

11. Використаємо малюнок і позначення до № 6; $SK = 10$ см, OD — радіус кола, описаного навколо $ABCD$; $OD = 3\sqrt{2}$ см; $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$; $a = 6$ см — сторона квадрата. $S_{б.} = \dfrac{1}{2}P \cdot h$; $S_{б.} = \dfrac{1}{2} \cdot 4a \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 = 120$ (см^2).

Відповідь: 120 см^2.

12. $SABCD$ — дана піраміда, основа якої — прямокутник $ABCD$ зі сторонами 8 см і 6 см. Бічні грані $(SAB) \perp (ABC)$, $(SBC) \perp (ABC)$, тоді $SB \perp (ABC)$, SB є висотою піраміди. SD — похила, BD — проекція, тоді $\angle SDB = 60°$ — кут між SD і (ABC). SA — похила, AB — проекція, тоді $\angle SAB$ — кут між SA і (ABC), $\angle SAB$ — шуканий.



У прямокутнику $ABCD$: $BD = 10$ см.

У ΔSBD: $\angle B = 90°$; $\operatorname{tg}\angle D = \dfrac{SB}{BD}$;

$SB = BD \cdot \operatorname{tg}\angle D$; $SB = 10 \cdot \operatorname{tg}60° = 10\sqrt{3}$ (см).

У ΔSBA: $\angle B = 90°$;

$\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{SB}{AB}$; $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{10\sqrt{3}}{AB}$.

Якщо $AB = 6$ см, то

$\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{10\sqrt{3}}{6} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$; $\angle A = \operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Якщо $AB = 8$ см, то $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{10\sqrt{3}}{8} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$; $\angle A = \operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ або $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

13. Див. рис., пояснення і позначення до № 12.

У прямокутнику $ABCD$: $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $BD = 5$ см.

$SB \perp (ABC)$, SC — похила, BC — проекція, $\angle SCB$ — кут між SC і (ABC).

$BA < BC < BD$, тому $SA < SC < SB$, тоді $\angle SAB = 30°$, $\angle SDB$ — шуканий.

У ΔSAB: $\angle B = 90°$:

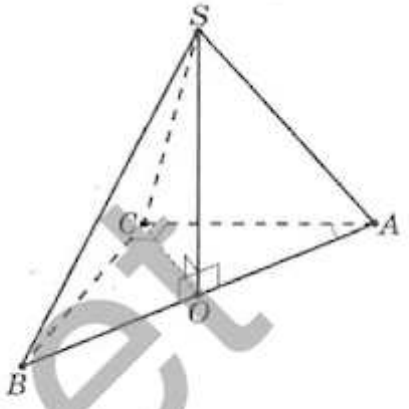
$\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{SB}{AB}$; $SB = AB \cdot \operatorname{tg}\angle A = 3 \cdot \operatorname{tg}30° = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (см).

alaz.net

У ΔSBD: $\angle B = 90°$; $\operatorname{tg}\angle D = \dfrac{SB}{BD}$; $\operatorname{tg}\angle D = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$; $\angle D = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

14. Нехай $SABC$ — дана піраміда, прямокутний ΔABC — основа, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 30$ дм. Оскільки всі бічні ребра нахилені до площини основи під одним кутом, то основою піраміди SO є точка O — центр кола, описаного навколо ΔABC — середина гіпотенузи AB. $SO \perp (ABC)$, SA, SB, SC — похилі, OA, OB, OC — проекції, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = 60°$ — кути між бічними ребрами і основою, $AO = BO = CO$, $SA = SB = SC$.



У ΔABC: $AB = 2BC$ (катет проти кута 30° дорівнює половині гіпотенузи); $AB = 2 \cdot 30 = 60$ (дм);

$AO = BO = \dfrac{1}{2}AB = 30$ дм.

У ΔSOB: $\angle O = 90°$; $\angle B$ 60°; $\operatorname{tg}\angle B = \dfrac{SO}{BO}$;

$SO = BO \cdot \operatorname{tg}\beta$; $SO = 30 \cdot \operatorname{tg} 60°$;

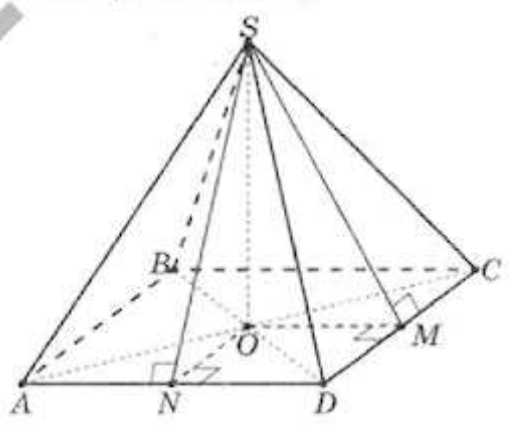
$SO = 30 \cdot \sqrt{3} = 30\sqrt{3}$ (дм).

Відповідь: $30\sqrt{3}$ дм.

15. Нехай $SABCD$ — дана піраміда, $ABCD$ — прямокутник — основа піраміди, $AB = CD = 8\sqrt{2}$ см; $AD = BC = 12\sqrt{2}$ см. SO — висота піраміди, O — точка перетину діагоналей прямокутника. Проведемо $OM \perp CD$, $ON \perp AD$; $SO \perp (ABC)$, SM і SN — похилі, тоді $SM \perp CD$, $SN \perp AD$, отже, $\angle SMO$ і $\angle SNO$ — лінійні кути двогранних кутів між бічними гранями і площиною основи.

O — середина AC, тоді M — середина DC,

N — середина AD, $OM \parallel AD$,



$OM = \dfrac{1}{2}AD = 6\sqrt{2}$ (см); $ON \parallel CD$;

$ON = \dfrac{1}{2}CD = 4\sqrt{2}$ (см); $SO = 4$ см.

У ΔSOM: $\angle O = 90°$; $\operatorname{tg}\angle M = \dfrac{SO}{OM}$;

$\operatorname{tg}\angle M = \dfrac{4}{6\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{6 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $\angle M = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

У ΔSON: $\angle O = 90°$; $\operatorname{tg}\angle N = \dfrac{SO}{ON}$; $\operatorname{tg}\angle N = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\angle N = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Протилежні грані даної піраміди нахилені під відповідно рівними кутами.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

16. Нехай $SABCD$ — правильна піраміда, квадрат $ABCD$ — основа, SO — висота, O — точка перетину діагоналей $ABCD$. Проведемо SN — апофему бічної грані CSD: $SN \perp CD$. $SO \perp (ABC)$, SN — похила, ON — проекція, $ON \perp CD$ (теорема про три перпендикуляри), $\angle SNO$ — лінійний кут двогранного кута між бічною гранню і площиною основи, $\angle SNO = 45°$ (усі бічні грані нахилені однаково до площини основи). $DC \perp ON$, $DC \perp SN$, отже $DC \perp (ONS)$. $DC \subset (DSC)$, тоді $(DSC) \perp (ONS)$.

alldz.net

Проведемо $OK \perp SN$, $OK \subset (DSC)$, тоді $OK \perp (ONS)$; $OK = \sqrt{6}$ см.

У ΔOKN: $\angle K = 90°$; $\angle N = 45°$, $\angle O = 45°$, ΔOKN — рівнобедрений;

$ON = OK \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (см).

У ΔSON: $\angle O = 90°$, $\angle N = 45°$, $\angle S = 45°$, ΔOSN — рівнобедрений,

$SN = ON \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ (см).

$SN = h$. $ON = \frac{1}{2} AD$;

$AD = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (см).

$S_б = \frac{1}{2} P \cdot h$; $S_б = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 16 \cdot \sqrt{18} = 16 \cdot 3\sqrt{2} = 48\sqrt{2}$ (см^2).

Відповідь: $48\sqrt{2}$ см^2.

17. Див. рис. і позначення до № 9. Нехай $SABC$ — дана правильна піраміда. $SO = 4$ см; $\angle ASC = 60°$. Оскільки ΔASC — рівнобедрений, $\angle S = 60°$, то ΔASC — рівносторонній. Позначимо сторону ΔASC за x. Тоді $SD = \frac{x\sqrt{3}}{2} = h$.

ΔABC рівносторонній зі стороною x; $OD = \frac{x\sqrt{3}}{6}$.

У ΔSOD: $\angle O = 90°$; $SO = 4$ см; $SO^2 = SD^2 - DO^2$; $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 4^2$;

$\frac{x^2 \cdot 3}{4} - \frac{x^2 \cdot 3}{36} = 4^2$; $\frac{8x^2}{12} = 4^2$; $\frac{2x^2}{3} = 4^2$; $2x^2 = 48$; $x^2 = 24$; $x = 2\sqrt{6}$; $S_б = \frac{1}{2} P \cdot h$;

$S_б = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot 24\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$ (м^2).

Відповідь: $18\sqrt{3}$ м^2.

18. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана правильна зрізана піраміда, ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні — основи піраміди. OO_1 — висота піраміди, точки O і O_1 — центри ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ відповідно; $AB = 12$ см, $A_1B_1 = 4$ см, $OO_1 = \sqrt{3}$ см.

Проведемо BD і B_1D_1 — висоти (медіани, бісектриси) ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ відповідно; $O \in BD$; $O_1 \in B_1D_1$;

$BD = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см), $B_1D_1 = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см).

$BD \subset (ABC)$, $B_1D_1 \subset (A_1B_1C_1)$, $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, $AC \parallel A_1C_1$, тоді $BD \parallel B_1D_1$.

Розглянемо трапецію DD_1O_1O:

$D_1O = \frac{1}{3} B_1D_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (см);

$DO = \frac{1}{3} BD = 2\sqrt{3}$ (см).

Проведемо D_1N — висоту; $D_1N \perp BD$; $D_1N \parallel OO_1$;

$D_1N = O_1O = \sqrt{3}$ (см); $D_1O = NO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ см.

$DN = DO - ON$.

$DN = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ (см).

У ΔDD_1N: $\angle N = 90°$; $DD_1^2 = DN^2 + D_1N^2$;

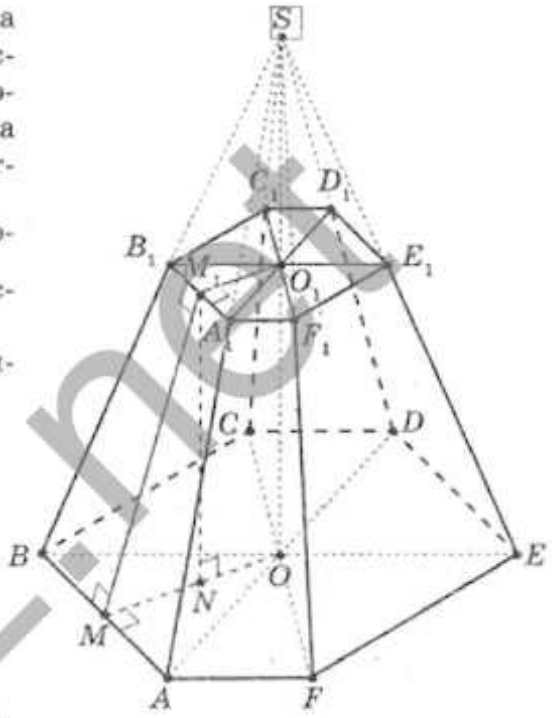
$DD_1^2 = \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{16}{3} + 3 = \frac{25}{3}$; $DD_1 = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ (см).

$D_1N \perp DO$, $D_1N \perp (ABC)$, DD_1 — похила, DN — проекція; $DN \perp AC$, тоді $DD_1 \perp AC$; $A_1C_1 \parallel AC$; $DD_1 \perp A_1C_1$, тобто DD_1 — висота бічної грані — трапеції AA_1C_1C.

$S_б = 3S_{AA_1C_1C} = 3 \cdot \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot DD_1$; $S_б = 3 \cdot \frac{12+4}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $40\sqrt{3}$ см^2.

19. Нехай $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильна зрізана піраміда, основи — правильні шестикутники $ABCDEF$ і $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ зі сторонами 4 см і 2 см відповідно. OO_1 — висота піраміди, точки O і $4O_1$ — центри шестикутників; $OO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ΔBAO і $\Delta B_1A_1O_1$ — рівносторонні за властивістю правильного шестикутника.



Проведемо OM і O_1M_1 — висоти цих трикутників.

$OM = 2\sqrt{3}$ см, $O_1M_1 = \sqrt{3}$ см.

За аналогічними поясненнями до задачі 18 маємо: MM_1O_1O — трапеція; M_1N — висота;

$MN = MO \cdot NO = MO - M_1O = \sqrt{3}$ см.

У ΔMM_1N: $\angle N = 90°$; $MN = \sqrt{3}$ см;

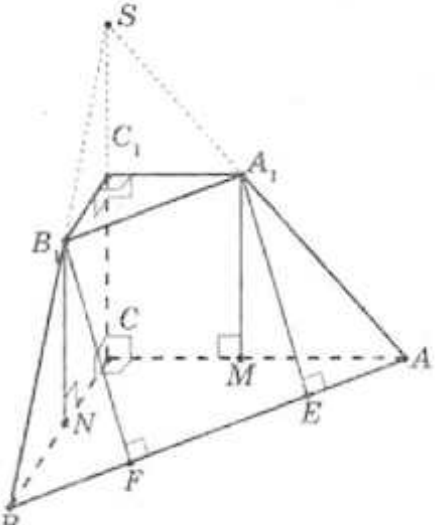
$M_1N = O_1O = \frac{\sqrt{3}}{3}$ см. $MM_1^2 = MN^2 + M_1N^2$;

$MM_1^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $MM_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (см).

$S_б = 6S_{ABB_1A_1} = 6 \cdot \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot MM_1$; $S_б = 6 \cdot \frac{4+2}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $12\sqrt{3}$ см^2.

20. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана зрізана піраміда, основи — ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — прямокутні, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. $(ACC_1) \perp (ABC)$, $(ACC_1) \perp (A_1B_1C_1)$, (BCC_1) і (ABC), $(BCC_1) \perp (A_1B_1C_1)$, тому $CC_1 \perp (ABC)$, $CC_1 \perp (A_1B_1C_1)$, CC_1 — висота піраміди, $CC_1 = \sqrt{3}$ см.



У ΔABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AB = 6$ см, тоді $BC = 3$ см, $AC = 3\sqrt{3}$ см.

У $\Delta A_1B_1C_1$: $\angle C_1 = 90°$, $\angle A_1 = 30°$, $A_1B_1 = 4$ см, тоді $B_1C_1 = 2$ см, $A_1C_1 = 2\sqrt{3}$ см.

alozi.net

AA_1C_1C і BB_1C_1C — прямокутні трапеції.

У трапеції AA_1C_1C проведемо висоту A_1M, $A_1M = C_1C = \sqrt{3}$ см;

$AM = AC - MC = AC - A_1C_1 = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (см).

У ΔAMA_1: $\angle M = 90°$; $AM = A_1M = \sqrt{3}$ см, тому $AA_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$ (см).

$S_{AA_1C_1C} = \dfrac{AC + A_1C_1}{2} \cdot CC_1$; $S_{AA_1C_1C} = \dfrac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 7{,}5$ (см^2).

У трапеції BB_1C_1C проведемо висоту B_1N, $B_1N = C_1C = \sqrt{3}$ см;

$BN = BC - NC = BC - B_1C_1 = 3 - 2 = 1$ (см).

У ΔBNB_1: $\angle N = 90°$; $BB_1^2 = BN^2 + B_1N^2$; $BB_1^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4$; $BB_1 = 2$ см.

$S_{BB_1C_1C} = \dfrac{BC + B_1C_1}{2} \cdot CC_1$; $S_{BB_1C_1C} = \dfrac{3+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 2{,}5\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = 4{,}5\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1C_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$ (см^2).

У трапеції AA_1B_1B проведемо висоти A_1E і B_1F. Позначимо BF за x, AE за y;
$BF + AE = AB - FE = AB - A_1B_1 = 6 - 4 = 2$; $x + y = 2$.
У ΔBB_1F; $\angle F = 90°$; $B_1F^2 = BB_1^2 - BF^2 = 2^2 - x^2$.

У ΔAA_1E: $\angle E = 90°$; $A_1E^2 = AA_1^2 - AE^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 - y^2$.

$B_1F = A_1E$, тому $\begin{cases} 4 - x^2 = 6 - y^2, \\ x + y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - x^2 = 2, \\ x + y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} (y - x)(y + x) = 2, \\ x + y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y - x = 1, \\ x + y = 2, \end{cases}$

звідки $x = 0{,}5$; $y = 1{,}5$.

$B_1F^2 = 4 - 0{,}5^2 = 3{,}75$; $B_1F^2 = \dfrac{15}{4}$; $B_1F = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ см.

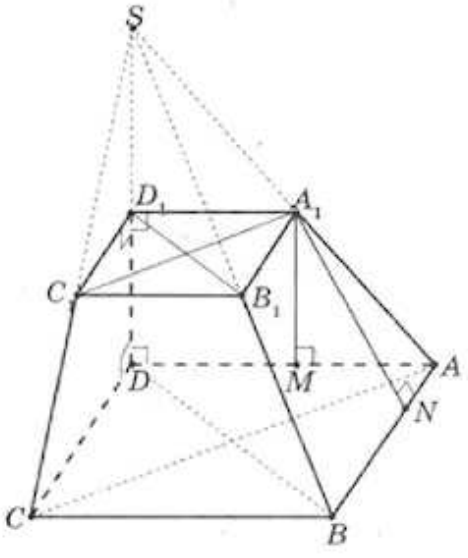
$S_{AA_1B_1B} = \dfrac{AB + A_1B_1}{2} \cdot B_1F = \dfrac{6+4}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{2} = 2{,}5\sqrt{15}$ (см^2).

$S_{п.} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + S_{AA_1C_1C} + S_{BB_1C_1C} + S_{AA_1B_1B}$.

$S_{п.} = 4{,}5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 7{,}5 + 2{,}5\sqrt{15} = 9\sqrt{3} + 2{,}5\sqrt{15} + 7{,}5$ (см^2).

Відповідь: $\left(9\sqrt{3} + 2{,}5\sqrt{15} + 7{,}5\right)$ см^2.

21. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — дана зрізана піраміда, основи її — ромби $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ зі сторонами 8 см і 6 см відповідно і гострим кутом 60°. Бічне ребро, що сполучає вершини D і D_1 (вершини тупих кутів ромбів), є висотою призми; $DD_1 = 0{,}5\sqrt{3}$ см; $DD_1 \perp (ABC)$, $DD_1 \perp (A_1B_1C_1)$.



$S_{ABCD} = 8^2 \cdot \sin 60° = 64 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{A_1B_1C_1D_1} = 6^2 \cdot \sin 60° = 36 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ (см^2).

Прямокутні трапеції AA_1D_1D і CC_1D_1D рівні між собою (мають рівні відповідні основи і спільну меншу сторону), отже, $S_{AA_1D_1D} = S_{CC_1D_1D}$.

gdz.net

Трапеції AA_1B_1B і CC_1B_1B рівні між собою (аналогічно), отже, $S_{AA_1B_1B} = S_{CC_1B_1B}$.

У трапеції AA_1D_1D: $\angle D = \angle D_1 = 90°$; проведемо A_1M — висоту трапеції, $A_1M = D_1D = 0,5\sqrt{3}$ см; $AM = AD - MD = AD - A_1D_1 = 8 - 6 = 2$ (см).

$$AA_1^2 = AM^2 + MA_1^2;\quad AA_1^2 = 2^2 + \left(0,5\sqrt{3}\right)^2 = 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4};\quad AA_1 = \frac{\sqrt{19}}{2}\text{ см}.$$

$$S_{AA_1D_1D} = \frac{AD + A_1D_1}{2} \cdot A_1M = \frac{8+6}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}\ (\text{см}^2).$$

У трапеції BB_1D_1D: $B_1D_1 = 6$ см, $BD = 8$ см (оскільки гострі кути ромба 60°, то діагональ проти цього кута дорівнює стороні); DD_1 — бічна сторона, отже, $BB_1D_1D = AA_1D_1D$, тому $BB_1 = AA_1 = \frac{\sqrt{19}}{2}$ см.

Маємо: AA_1B_1B — рівнобічна трапеція, проведемо A_1N — висоту.

У ΔAA_1N: $AA_1 = \frac{\sqrt{19}}{2}$; $\angle N = 90°$; $AN = \frac{BA - B_1A_1}{2} = \frac{8-6}{2} = 1$ (см).

$$A_1N^2 = A_1A^2 - AN^2;\quad A_1N^2 = \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 - 1^2 = \frac{19}{4} - 1 = \frac{15}{4};\quad A_1N = \frac{\sqrt{15}}{2}\text{ см}.$$

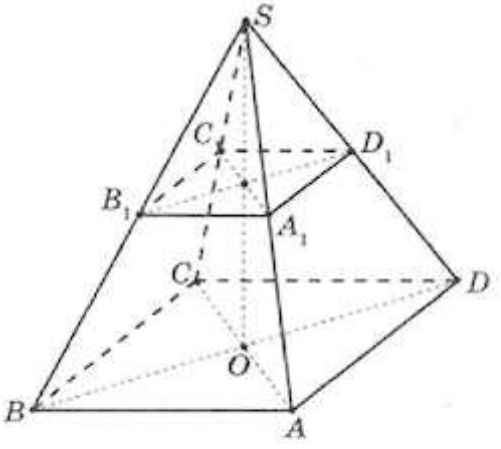
$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot A_1N;\quad S_{AA_1B_1B} = \frac{8+6}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{7\sqrt{15}}{2}\ (\text{см}^2).$$

$$S_{п.} = S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} + 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{AA_1B_1B}.$$

$$S_{п.} = 32\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{7\sqrt{15}}{2} = 57\sqrt{3} + 7\sqrt{15}\ (\text{см}^2).$$

Відповідь: $\left(57\sqrt{3} + 7\sqrt{15}\right)$ см^2.

22. Нехай $SABCD$ — дана правильна піраміда, основа — квадрат $ABCD$, SO — висота, O — точка перетину діагоналей квадрата, φ — площина перерізу, O_1 — точка перетину φ і SO; $\varphi \parallel (ABC)$, $S_{пер.} = 36$ см^2.



Оскільки $\varphi \parallel (ABC)$, то прямі перетину φ і бічних граней паралельні відповідним ребрам основи: $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$, $A_1D_1 \parallel AD$, $\varphi \perp SO$; можна розглянути гомотетію з центром S і коефіцієнтом $k = \frac{SO_1}{SO} = \frac{1}{2}$, що перетворює квадрат $ABCD$ у квадрат $A_1B_1C_1D_1$, сторони якого вдвічі менші, а $S_{ABCD} = 4S_{A_1B_1C_1D_1} = 4 \cdot 36$ (см^2).

$S_{ABCD} = a^2 = 4 \cdot 36$; $a = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.

23. Аналогічно до № 22 (тільки основою є прямокутник).

$S_{ABCD} = 4S_{A_1B_1C_1D} = 4 \cdot 133$ (см^2).

$S_{ABCD} = AB \cdot BC$; $AB = 5$ см; $5 \cdot BC = 4 \cdot 133$; $BC = \frac{532}{5} = 106,4$ (см).

Відповідь: 106,4 см.

alds.net

24. Розглянемо гомотетію з центром у вершині піраміди, що переводить основу піраміди у n-кутник перерізу, $k = \frac{1}{2}$; $S_{осн.} = 4S_{пер.}$; $S_{осн.} - S_{пер.} = 381$ (см^2).

$S_{осн.} = 381 + S_{пер.}$; $381 + S_{пер.} = 4S_{пер.}$; $381 = 3S_{пер.}$; $S_{пер.} = 127$ см^2;
$S_{осн.} = 381 + 127 = 508$ (см^2).
Відповідь: 508 см^2.

25. Позначимо відповідні сторони основ зрізаної піраміди a і b. Оскільки бічна грань — трапеція з основами a і b, а паралельний переріз перетинає бічні ребра в серединах, то середня лінія трапеції $\frac{a+b}{2}$.

n-кутники основ і перерізу подібні з коефіцієнтом $q = \frac{b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{a}$;

$q = \frac{a+b}{2a} = \frac{a}{2a} + \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{a}\right)$; $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2}$; $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}$;

$q = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}\right)$.

Нехай площа перерізу S, тоді $\frac{S}{S_2} = q^2$; $S = S_2 \cdot q^2 = S_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}\right)^2}{S_2}$.

Відповідь: $S = \frac{1}{4}\left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}\right)^2$ (S_1 і S_2 — площі n-кутників зі сторонами b і a відповідно).

26. Див. рис. до № 9. Нехай $SABC$ — правильна трикутна піраміда, ΔABC — правильний — основа; SO — висота, точка O — центр ΔABC, SD — апофема піраміди.
$SO \perp (ABC)$, SA і SD — похилі, OA і OD — відповідні проекції, тоді $\angle SAO$ — кут між SA і (ABC), $\angle SDO$ — кут між SD і (ABC). Позначимо $\angle SAO = \alpha$, $\angle SDO = \beta$. За умовою $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Оскільки $SD \perp AC$ і $OD \perp AC$, то $\angle SDO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі основи. За прикладом 1 §16 маємо:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha, \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad \alpha < \frac{\pi}{4}; \ \beta < \frac{\pi}{4}; \ \operatorname{tg}\alpha > 0; \ \operatorname{tg}\beta > 0.$$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\operatorname{tg}\alpha$; $\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha$; $(1 - \operatorname{tg}\alpha) = 2\operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha)$; $\operatorname{tg}\alpha \neq -1$;

$2\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$. Заміна: $\operatorname{tg}\alpha = t$, $t \neq -1$, $t > 0$. $D = 9 + 8 = 17$;

$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$; $t = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17} - 3}{4}$.

$\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$; $\operatorname{tg}\beta = 2\frac{1 - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta}$; $(1 + \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{tg}\beta = 2 - 2\operatorname{tg}\beta$; $\operatorname{tg}\beta \neq -1$;

$\operatorname{tg}^2\beta + 3\operatorname{tg}\beta - 2 = 0$. Заміна: $\operatorname{tg}\beta = p$, $p > 0$. $D = 9 + 8 = 17$;

$p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$; $p = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$; $\beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17} - 3}{2}$.

Відповідь: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17} - 3}{4}$; $\beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17} - 3}{2}$.

alda.net

27. Див. рис. до № 9. Нехай $SABC$ — правильна трикутна піраміда, ΔABC — правильний — основа, SO — висота, точка O — центр ΔABC; R — радіус кола, описаного навколо ΔABC, $\angle ASO = \alpha$.

Позначимо сторону ΔABC за a, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $a = R\sqrt{3}$.

$AO = BO = CO = R$.

У ΔSOA: $\angle O = 90°$; $\operatorname{tg}\angle A = \frac{SO}{AO}$; $SO = OA \cdot \operatorname{tg}\angle A$; $\angle A = 90° - \alpha$;

$SO = R \cdot \operatorname{ctg}\alpha$. SD — апофема, тоді OD — радіус вписаного кола.

У ΔSOD: $OD = \frac{1}{2}R$; $\angle O = 90°$; $SD^2 = OD^2 + SO^2 = R^2\operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{R^2}{4}$;

$SD^2 = \frac{R^2(4\operatorname{ctg}^2\alpha + 1)}{4}$; $SD = \frac{R}{2}\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$.

$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн.}} = 3S_{\Delta ASC} + S_{\Delta ABC}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$;

$S_{\Delta ASC} = \frac{1}{2}AC \cdot SD = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2}\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$.

$S_{\text{п.}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} + 1\right) + \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} + 1\right)$.

Відповідь: $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} + 1\right)$.

28. Див. рис. до № 9. Нехай $SABC$ — дана правильна піраміда, ΔABC — правильний зі стороною a — основа, SO — висота піраміди, точка O — центр ΔABC. SD — апофема, $SO \perp (ABC)$, $SD \perp AC$, $OD \perp AC$, $\angle SDO$ — лінійний кут двогранного кута при основі, $\angle SDO = \alpha$.

$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; з ΔSDO: $\angle O = 90°$; $\cos\angle D = \frac{DO}{SD}$;

$SD = \frac{DO}{\cos\angle D} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\cos\alpha}$; $SD = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha} = h$.

$S_{\text{п.}} = S_{\text{б.}} + S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}P_{\Delta ABC} \cdot h + S_{\Delta ABC}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$S_{\text{п.}} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right)$.

Відповідь: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right)$.

29. Нехай $SABC$ — дана правильна піраміда. Використаємо обґрунтування до задачі № 28. $\angle ASC = \alpha$, $SA = SB = SC = b$, апофема SD в ΔASC є висотою, медіаною, бісектрисою, тому $\angle ASD = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ADS = 90°$.

У ΔASD: $SD = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = h$; $AD = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, тоді $AC = 2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

$S_{\text{п.}} = S_{\text{б.}} + S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\left(2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}$;

alov.net

$$S_п = \frac{3}{2}b^2 \sin\alpha + \frac{4b^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{4} = b^2\left(1{,}5\sin\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}\right).$$

Відповідь: $b^2\left(1{,}5\sin\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}\right)$.

30. Нехай $SABC$ — дана правильна трикутна піраміда. Використаємо обґрунтування до № 29. $\angle ASC = \alpha$, R — радіус кола, описаного навколо ΔASC.
За теоремою синусів:

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R;\ AC = 2R\sin\alpha;\ \angle ASD = \frac{\alpha}{2};\ AD = \frac{1}{2}AC = R\sin\alpha.$$

У ΔASD: $\angle D = 90°$;

$$\operatorname{tg}\angle S = \frac{AD}{SD};\ SD = \frac{AD}{\operatorname{tg}\angle S} = AD\cdot\operatorname{ctg}\angle S = AD\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = R\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

$$SD = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R\cos^2\frac{\alpha}{2} = h.$$

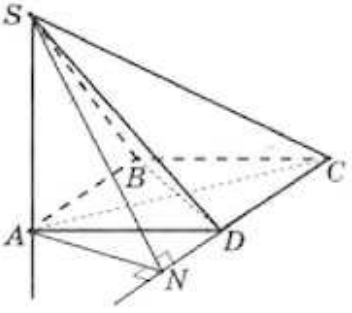
$$S_п = S_б + S_{осн.} = \frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 2R\cdot\sin\alpha\cdot 2R\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{\left(2R\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S_п = 6R\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{4R^2\sin^2\alpha\sqrt{3}}{4} = R^2\sin\alpha\left(6\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{3}\sin\alpha\right) =$$

$$= R^2\sin\alpha\left(6\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{3}\right) = 2R^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(3\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Відповідь: $2\sqrt{3}R^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

31. Нехай $SABCD$ — дана піраміда, S — вершина, ромб $ABCD$ — основа, $AB = BC = AC = AD = a$, $\angle A = \angle C = \alpha$; грані $(DAS) \perp (ABC)$, $(BAS) \perp (ABC)$, тобто їх спільне ребро SA є висотою піраміди, $SA \perp (ABC)$.



Проведемо $AN \perp CD$, SA — перпендикуляр до (ABC), SN — похила, AN — проекція, тоді $SN \perp CD$ (теорема про три перпендикуляри). $\angle SNA = \beta$ — лінійний кут двогранного кута між (SDC) і (ABC). Грань (SBC) нахилена до (ABC) під таким же кутом.
$AB \parallel CD$ (за властивістю ромба), AD — січна, $\angle BAD = \angle ADN$ (внутрішні різносторонні); $\angle ADN = \alpha$.
У ΔADN: $\angle N = 90°$; $AD = a$; $AN = AD\cdot\sin\alpha = a\sin\alpha$.

У ΔSAN: $\angle A = 90°$; $SA = AN\cdot\operatorname{tg}\beta = a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$; $SN = \frac{AN}{\cos\beta} = \frac{a\sin\alpha}{\cos\beta}$.

$\Delta ASD = \Delta ASB$ (прямокутні за двома катетами), звідси $SD = SB$, тоді $\Delta CSD = \Delta CSB$ (за трьома сторонами).

$$S_б = 2S_{\Delta ASD} + 2S_{\Delta CSD} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}SA\cdot AD\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{2}CD\cdot SN\right) = SA\cdot AD + CD\cdot SN =$$

$$= AD\cdot(SA + SN) = a\left(a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta + \frac{a\sin\alpha}{\cos\beta}\right) = a^2\sin\alpha\left(\frac{\sin\beta + 1}{\cos\beta}\right).$$

Відповідь: $S_б = a^2\sin\alpha\left(\frac{\sin\beta + 1}{\cos\beta}\right)$.

alzi.net

32. Див. рис., позначення та обґрунтування до № 31.

$SN \perp CD$, $AN \perp CD$, тому $(SAN) \perp CD$; $CD \subset (SDC)$, тоді $(SAN) \perp (SDC)$.

У площині (SAN) проведемо $AP \perp SN$, тоді $AP \perp (SDC)$, $AP = d$.

У ΔSAN: $\angle A = 90°$; $\angle N = \beta$; AP — висота; $AP = d$;

$\angle SAP = \beta$; $AN = \dfrac{d}{\sin\beta}$; $SA = \dfrac{d}{\cos\beta}$.

У ΔADN: $\angle N = 90°$; $\angle D = \alpha$; $AD = \dfrac{AN}{\sin\alpha} = \dfrac{d}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Відповідь: $SA = \dfrac{d}{\cos\beta}$; $AD = \dfrac{d}{\sin\alpha\sin\beta}$.

33. Нехай $SABCD$ — дана піраміда, S — вершина, основа — ромб $ABCD$, $\angle B = \angle D = \beta$; $(SAB) \perp (ABC)$, $(SCB) \perp (ABC)$, тоді SB є висотою піраміди, $SB \perp (ABC)$.

Проведемо $BN \perp CD$, BN — висота ромба; SB — перпендикуляр до (ABC), SN — похила, BN — проекція, тому $SN \perp DC$ (за теоремою про три перпендикуляри). Отже, $\angle SNB$ — лінійний кут двогранного кута між (SDC) і (ABC). Грань (SAD) нахилена до основи під таким же кутом; $\angle SNB = \alpha$.

Оскільки $BN \perp CD$, $SN \perp CD$, то $CD \perp (BNS)$, $CD \subset (SCD)$, отже $(BNS) \perp (SCD)$.

M — середина SB; $MP \perp SN$, тоді $MP \perp (SCD)$, $MP = l$.

У ΔSBN: $\angle B = 90°$; $\angle N = \alpha$; $MP \perp SN$, $\angle S = 90° - \alpha$, тоді $\angle SMP = \alpha$.

$SM = \dfrac{l}{\cos\alpha}$; $SB = 2SM = \dfrac{2l}{\cos\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{SB}{BN}$;

$BN = \dfrac{SB}{\operatorname{tg}\alpha} = SB \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2l}{\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2l}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2l}{\sin\alpha}$.

У ΔBCN: $\angle N = 90°$; $\angle C = 180° - \beta$;

$\sin\angle C = \dfrac{BN}{BC}$; $BC = \dfrac{BN}{\sin(180° - \beta)} = \dfrac{\frac{2l}{\sin\alpha}}{\sin\beta}$; $BC = \dfrac{2l}{\sin\alpha\sin\beta}$ — сторона ромба.

Відповідь: $SB = \dfrac{2l}{\cos\alpha}$; $BC = \dfrac{2l}{\sin\alpha\sin\beta}$.

34. Нехай $SABC$ — трикутна піраміда, S — вершина, ΔABC — основа, α і β — площини, $\alpha \parallel (ABC)$, $\beta \parallel (ABC)$, $\Delta A_1B_1C_1$ і $\Delta A_2B_2C_2$ — отримані переріз, O, O_1, O_2 — центроїди ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ і $\Delta A_2B_2C_2$ відповідно; M_1 і M_2 — точки перетину SO і $(A_1B_1C_1)$ і $(A_2B_2C_2)$ відповідно. AD — медіана ΔABC, $O \in AD$; $AO : DO = 2 : 1$.

Проведемо переріз піраміди площиною (SAD), D_1 і D_2 — точки перетину (SAD) і C_1B_1 і C_2B_2 відповідно.

Розглянемо гомотетію з центром S, що перетворює ΔABC в $\Delta A_1B_1C_1$ і $\Delta A_2B_2C_2$, тоді A_1D_1 і A_2D_2 — образи AD; M_1 і M_2 — образи точки O.

AD — медіана ΔABC, тоді A_1D_1 і A_2D_2 — медіани $\Delta A_1B_1C_1$ і $\Delta A_2B_2C_2$.

Оскільки відношення відрізків зберігається і $AO : DO = 2 : 1$, то

alov.net

$A_1M_1 : D_1M_1 = A_2M_2 : D_2M_2 = AO : DO = 2 : 1$, це означає, що M_1 і M_2 — точки перетину медіан $\Delta A_1B_1C_1$ і $\Delta A_2B_2C_2$, тобто M_1 і O_1, M_2 і O_2 співпадають.
Оскільки M_1, M_2 і O належать SO, то O_1, O_2, O належать SO.
Відповідь: O, O_1, O_2 належать одній прямій SO.

35. Позначимо плоский кут при вершині даної правильної піраміди γ, $\gamma = 30°$, а двогранний кут при бічному ребрі δ.

1) Якщо піраміда трикутна: за прикладом 2.2 §16: $2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = 1$;

$$2\cos\frac{30°}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = 1;\quad \sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2\cos 15°};\quad \cos^2 15° = \frac{1+\cos 30°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4};$$

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\quad \sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}};$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{3}};\quad \frac{\delta}{2} = \arcsin\sqrt{2-\sqrt{3}};$$

$$\delta = 2\arcsin\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

2) Якщо піраміда чотирикутна: за OK — 10: $2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{2}$;

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}};\quad \frac{\delta}{2} = \arcsin\sqrt{4-2\sqrt{3}};$$

$$\delta = 2\arcsin\sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$

3) Якщо піраміда шестикутна: за OK — 11:

$$2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6-3\sqrt{3}};$$

$$\frac{\delta}{2} = \arcsin\sqrt{6-3\sqrt{3}};\quad \delta = 2\arcsin\sqrt{6-3\sqrt{3}}.$$

4) Якщо піраміда n-кутна: за OK — 12: $\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$;

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\left(\frac{180°}{n}\right)}{\cos 15°} = \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\cdot 2\sqrt{2-\sqrt{3}};$$

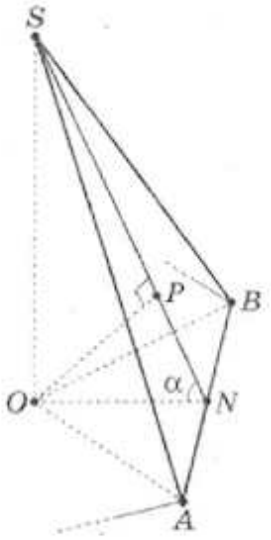
$$\frac{\delta}{2} = \arcsin\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right);\quad \delta = 2\arcsin\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right).$$

Відповідь: 1) $2\arcsin\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 2) $2\arcsin\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; 3) $\delta = 2\arcsin\sqrt{6-3\sqrt{3}}$;
4) $2\arcsin\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)$.

36. Дана правильна піраміда, основа — правильний n-кутник $ABC\ldots$, S — вершина, SO — висота, де точка O — центр n-кутника.
Проведемо апофему бічної грані ABS: SN, $SN \perp AB$, тоді $ON \perp AB$, ON — проекція SN, тоді $\angle SNO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі основи.
$AB = 1$ м; ON — радіус вписаного кола. $SN \perp AB$, $ON \perp AB$, тоді $AB \perp (SNO)$.
$AB \subset (SBA)$, отже, $(SBA) \perp (SNO)$.

alov.net

Проведемо $OP \perp SN$, тоді $OP \perp (SBA)$, OP — шукана відстань.



Позначимо міру двогранного кута при ребрі основи α, при бічному ребрі δ. За умовою $\operatorname{tg}\delta = \sqrt{2}$.

1) $SABC$ — трикутна піраміда, O — точка перетину медіан ΔABC, MA — медіана. $BC \perp (SMA)$, проведемо $BF \perp SA$, MF — проекція, $CF \perp SA$, MF — проекція, $\angle BFC = \delta$ — лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі.

За прикладом 2(1) §16:

$$\sqrt{3}\sin\alpha = 2\cos\frac{\delta}{2};\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}.$$

У ΔNOP: $\angle P = 90°$; $\angle N = \alpha$; $ON = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\cdot AB = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (м),

$$OP = ON\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2} = \frac{1}{3}\cos\frac{\delta}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\delta = \sqrt{2};\quad \cos^2\delta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\delta} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3};\quad \cos\delta = \sqrt{\frac{1}{3}};\quad \cos\delta > 0.$$

$$\cos^2\frac{\delta}{2} = \frac{1+\cos\delta}{2} = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6};\quad \cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}.\quad OP = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}.$$

2) $SABCD$ — чотирикутна піраміда; $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\dfrac{\delta}{2}$.

Аналогічно (1): в ΔNOP: $OP = ON\cdot\sin\alpha$.

$$ON = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\text{ (м)};\quad OP = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}.$$

3) $SABCDEF$ — шестикутна піраміда: $\sin\alpha = 2\cos\dfrac{\delta}{2}$.

Аналогічно (1): в ΔNOP: $OP = ON\cdot\sin\alpha$.

$$ON = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ (м)}.\quad OP = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}.$$

4) $SABC\ldots$ — n-кутна піраміда: $\sin\alpha = \dfrac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}$.

Аналогічно (1): в ΔNOP: $OP = ON\cdot\sin\alpha$.

$$ON = r_{вп.} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}};\quad OP = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}}{\sin\frac{180°}{n}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}\cos\frac{180°}{n}}{2\sqrt{6}\sin^2\frac{180°}{n}}.$$

Відповідь: 1) $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}}$; 2) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$; 3) $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{3}}\cos\frac{180°}{n}}{2\sqrt{6}\sin^2\frac{180°}{n}}$.

37. Дана правильна піраміда, основа — правильний n-кутник $ABC\ldots$, S — вершина, SO — висота, точка O — центр n-кутника, M — середина SO; $MP \perp SA$, $MP = 2$ см.

ald.net

SN — апофема бічної грані, $\angle SNO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі основи, $\angle SNO = \alpha$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Позначимо міру двогранного кута при бічному ребрі δ.

Оскільки можна використати приклад 2(1) §16, то задача містить зайві дані, а саме $MP = 2$ см.

1) Піраміда трикутна: $\sqrt{3}\sin\alpha = \cos\frac{\delta}{2}$; $\cos\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

$\frac{\delta}{2} = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\delta = 2\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2) Піраміда чотирикутна: $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}$; $\cos\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}$;

$\frac{\delta}{2} = \arccos\frac{1}{3}$; $\delta = 2\arccos\frac{1}{3}$.

3) Піраміда шестикутна: $\sin\alpha = 2\cos\frac{\delta}{2}$; $\cos\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

$\frac{\delta}{2} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$; $\delta = 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

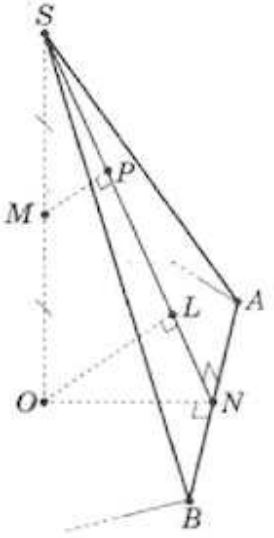
4) Піраміда n-кутна: $\cos\frac{\delta}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$;

$\frac{\delta}{2} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\frac{180^\circ}{n}\right)$; $\delta = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\frac{180^\circ}{n}\right)$.

Відповідь: 1) $2\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$; 2) $2\arccos\frac{1}{3}$; 3) $2\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$;

4) $2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\frac{180^\circ}{n}\right)$.

38. Дана правильна піраміда, основа — правильний n-кутник $ABC\ldots$, S — вершина, SO — висота, точка O — центр n-кутника. SN — апофема, $SN \subset (ABS)$, $SN \perp AB$, $ON \perp AB$, $\angle SNO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі основи, $AB \perp (SNO)$, тоді $(SAB) \perp (SNO)$; M — середина SO; $MP \perp SN$, тоді $MP \perp (SAB)$; $MP = d$. Міра двогранного кута при бічному ребрі δ.



Проведемо $OL \perp SN$, тоді $OL \parallel MP$, M — середина SO, тоді в ΔSOL MP — середня лінія, $MP = \frac{1}{2}OL$; $OL = 2d$.

У ΔOLN: $\angle L = 90^\circ$; позначимо $\angle ONL = \alpha$, $\angle ONL = \angle SNO$, тоді $ON = \frac{OL}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\alpha} = r$; ON — радіус кола, вписаного в n-кутник;

$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n} = 2\cdot\frac{2d}{\sin\alpha}\cdot\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{4d}{\sin\alpha}\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

За прикладом 2(1) §16:

1) Піраміда трикутна

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}$; $a_3 = 2r\sqrt{3} = 2\cdot\frac{2d}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{3} = \frac{4d\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}}$;

aldz.net

$$a_3 = \frac{6d}{\cos\frac{\delta}{2}};\quad S_\Delta = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4};\quad S_\Delta = \left(\frac{6d}{\cos\frac{\delta}{2}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{36d^2\cdot\sqrt{3}}{4\cos^2\frac{\delta}{2}} = \frac{9d^2\sqrt{3}}{\cos^2\frac{\delta}{2}}.$$

2) Піраміда чотирикутна

$$\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2};\quad a_4 = 2r = \frac{4d}{\sin\alpha} = \frac{4d}{\sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}};$$

$$S_{\text{кв.}} = a_4^2 = \left(\frac{4d}{\sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}}\right)^2 = \frac{16d^2}{2\cos^2\frac{\delta}{2}} = \frac{8d^2}{\cos^2\frac{\delta}{2}}.$$

3) Піраміда шестикутна

$$\sin\alpha = 2\cos\frac{\delta}{2};\quad a_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}r = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2d}{\sin\alpha} = \frac{4d}{2\sqrt{3}\cos\frac{\delta}{2}} = \frac{2d}{\sqrt{3}\cos\frac{\delta}{2}};$$

$$S_6 = 6\cdot\frac{a_6^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{2d}{\sqrt{3}\cos\frac{\delta}{2}}\right)^2 = \frac{6}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{4d^2}{3\cos^2\frac{\delta}{2}} = \frac{2\sqrt{3}d^2}{\cos^2\frac{\delta}{2}}.$$

4) Піраміда n-кутна

$$\sin\alpha = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}};\quad r = \frac{2d}{\sin\alpha};\quad a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n};$$

$$a_n = 2\cdot\frac{2d}{\sin\alpha}\cdot\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n} = 4\cdot\frac{4d\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\delta}{2}}\cdot\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

$$S_n = n\cdot S_\Delta = n\cdot\frac{1}{2}r\cdot a_n = n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2d\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\delta}{2}}\cdot\frac{4d\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\delta}{2}}\cdot\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n};$$

$$S_n = \frac{4nd^2\sin^2\frac{180^\circ}{n}\cdot\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}{\cos^2\frac{\delta}{2}}.$$

Відповідь: 1) $S_\Delta = \dfrac{9d^2\sqrt{3}}{\cos^2\frac{\delta}{2}}$; 2) $S_{\text{кв.}} = \dfrac{8d^2}{\cos^2\frac{\delta}{2}}$; 3) $S_6 = \dfrac{2\sqrt{3}d^2}{\cos^2\frac{\delta}{2}}$;

4) $S_n = \dfrac{4nd^2\sin^2\frac{180^\circ}{n}\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}{\cos^2\frac{\delta}{2}}$.

§ 17. Геометрія тетраедра

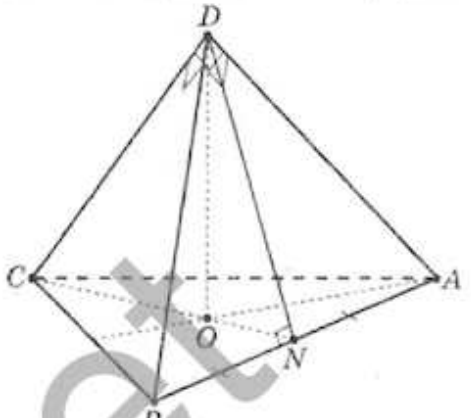
Тетраедр — трикутна піраміда.
Усіма гранями правильного тетраедра є правильні трикутники.
Правило чотирьох точок простору:
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB} = 0.$

alldz.net

Завдання 14

1. 1) так;
2) ні, якщо три грані — рівнобедрені прямокутні трикутники, то четверта грань складена з гіпотенуз цих трикутників, отже, утворений трикутник — рівносторонній.

2. Нехай $ABCD$ — тетраедр, основою якого є правильний трикутник ABC зі стороною a. Оскільки всі плоскі кути при вершині D прямі, то вершина проектується в ортоцентр основи, тобто DO — висота, де O — центр ΔABC (оскільки трикутник правильний). Проводимо висоту CN, вона є медіаною, N — середина AB, $ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;



$DO \perp (ABC)$, $ON \perp AB$, тоді $DN \perp AB$ як відповідна похила. Оскільки DN — висота і медіана ΔADB, то $AD = DB$, DN є бісектрисою $\angle ADB$, $\angle ADN = \frac{1}{2}90° = 45°$.

У ΔAND: $\angle N = 90°$, $\angle D = 45°$, $\angle A = 45°$,

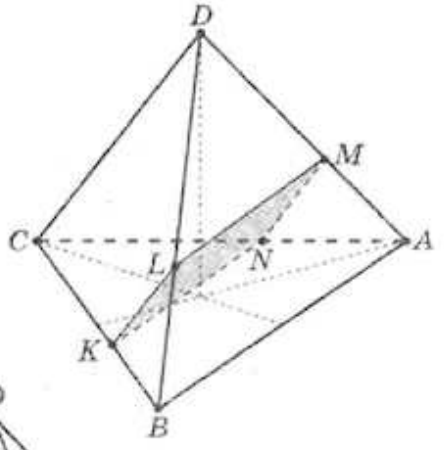
отже $AN = ND = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$.

У ΔDON: $\angle O = 90°$; $DO^2 = DN^2 - NO^2$;

$$DO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{6a^2}{36}. \quad DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

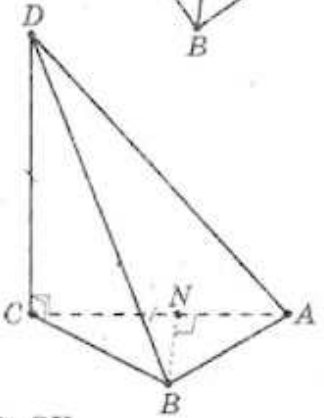
Відповідь: $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

3. Нехай $ABCD$ — правильний тетраедр, $K \in BC$. α — площина, паралельна AB і CD, перетинає ребра BD, AD, AC в точках L, M, N відповідно.



$AB \subset (ABD)$, LM — пряма перетину α і (ABD), отже, $LM \parallel AB$.
$CD \subset (BCD)$, KL — пряма перетину α і (BCD), отже, $KL \parallel CD$.
Аналогічно $KN \parallel AB$, $MN \parallel CD$, тобто $KLMN$ — паралелограм. $P_{KLMN} = 2(KL + LM)$.
Паралельна пряма відтинає від трикутника подібний, отже, ΔKLB, ΔLMD, ΔNMA, ΔKNC рівносторонні.
Позначимо BK за x, тоді $KL = NM = x$;
$CK = a - x$, тоді $KN = LM = a - x$,
$P_{KLMN} = 2(x + a - x) = 2a$.
Відповідь: $2a$.

4. $ABCD$ — тетраедр;
ΔACD і ΔBCD — прямокутні, $AB \neq BC$.
$DC \perp AC$, $DC \perp BC$, тому $DC \perp (ABC)$,
DC — висота тетраедра. BN — висота ΔABC;
$(ADC) \perp (ABC)$, $BN \perp AC$, тоді $BN \perp (ACD)$,
BN — висота тетраедра.
BN і DC не перетинаються.



5. $ABCD$ — тетраедр. Аналогічно до задачі 4.
Висота до грані ABC: CD; висота до грані ABD: CK.
C — точка перетину.

alg7.net

Висота до грані ACD: BN, $BN \subset (ABC)$, висота до грані BCD: AK, $AK \subset (ABC)$, BN і AK — висоти ΔABC, отже, перетинаються і ця точка не є вершиною C трикутника ABC.

6. Нехай $ABCD$ — даний тетраедр. Нехай $a = AD + BC$, $b = BD + AC$, $c = DC + AB$. За теоремою про нерівність трикутника:

з ΔADC: $AC + DC > AD$
з ΔABC: $AB + AC > BC$ $\Big|$ $+ (a)$

з ΔBCD: $BC + CD > BD$
з ΔADC: $AD + DC > AC$ $\Big|$ $+ (b)$

з ΔADC: $AD + AC > DC$
з ΔABC: $AC + BC > AB$ $\Big|$ $+ (c)$

Якщо можна побудувати трикутник з відрізків a, b, c, то $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

1) $a + b > c$

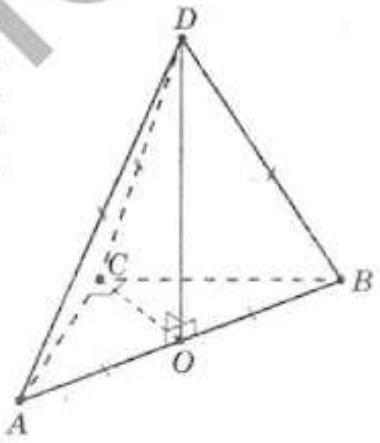
$AC + \underline{DC} + AB + AC + BC + \underline{CD} + AD + \underline{DC} > AD + AC + AC + BC$;

$3CD + AB > 0$ нерівність правильна.

Аналогічно перевіряємо інші суми. Висновок: такий трикутник можна побудувати.

7. Нехай $ABCD$ — даний тетраедр. Проведемо $AO \perp (BCD)$ і три площини через AO так, щоб α перетинало BC, β перетинало BD і γ перетинало CD, AO — їх спільна пряма, а отже, пряма перетину площин, причому $\alpha \perp BC$, $\beta \perp BD$, $\gamma \perp CD$.

8. $DABC$ — даний тетраедр, ΔABC — прямокутний — основа, $\angle C = 90°$; $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, отже, $AB = 10$ см. Оскільки вершина D рівновіддалена від вершин основи, то вона проектується в центр кола, описаного навколо ΔABC, — середину гіпотенузи точку O і є висотою грані DAB, $AB = AD = BD = CD = 10$ см,



$S_n = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{BCD} + S_{ABD}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2).

$S_{ABD} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{ACD} = \sqrt{\left(\frac{6+10+10}{2}\right) \cdot (13-10)^2 \cdot (13-6)} = \sqrt{13 \cdot 3^2 \cdot 7} = 3\sqrt{91}$ (см^2).

$S_{BCD} = \sqrt{\left(\frac{8+10+10}{2}\right) (14-10)^2 \cdot (14-8)} = \sqrt{14 \cdot 4^2 \cdot 6} = 4\sqrt{7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 8\sqrt{21}$ (см^2).

$S_n = 24 + 25\sqrt{3} + 3\sqrt{91} + 8\sqrt{21}$ (см^2).

Відповідь: $24 + 25\sqrt{3} + 8\sqrt{21} + 3\sqrt{91}$ см^2.

9. $DABC$ — даний тетраедр, ΔABC — прямокутний рівнобедрений — основа, $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ см. $DB \perp (ABC)$, отже, DB — висота тетраедра, отже, $(BAD) \perp (ABC)$, $(BCD) \perp (ABC)$. DC — похила, BC — проекція, $BC \perp AC$ (за умовою), тоді $DC \perp AC$ (теорема про три перпендикуляри), тому $\angle DCB = 60°$ — кут нахилу (ADC) до (ABC).

У ΔDBC: $\angle B = 90°$; $\operatorname{tg} 60° = \frac{DB}{BC}$; $DB = BC \cdot \operatorname{tg} 60° = 6 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (см);

$\cos 60° = \frac{BC}{CD}$; $CD = \frac{BC}{\cos 60°} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$ (см).

ald.net

$CD \quad \cos 60^\circ \quad 1/2$

У ΔABC: $AB = 6\sqrt{2}$ (см)

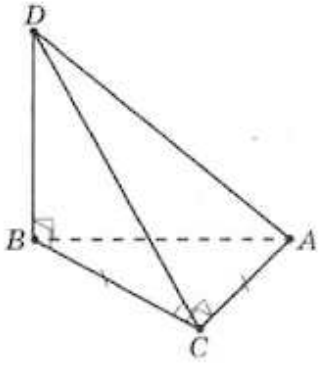
$S_б = S_{ACD} + S_{ABD} + S_{CBD}$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$ (см^2).

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{6}$ (см^2).

$S_{BCD} = \frac{1}{2} CB \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (см^2).

$S_б = 36 + 18\sqrt{6} + 18\sqrt{3} = 18 \cdot \left(2 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$ (см^2).



Відповідь: $18 \cdot \left(2 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$ см^2.

10. $DABC$ — даний тетраедр, ΔABC — рівнобедрений — основа, $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120°$. $(DAC) \perp (ABC)$, $(DAB) \perp (ABC)$, отже, DA — висота тетраедра, $DA \perp (ABC)$.

Проведемо $AN \perp BC$, AN — проекція похилої DN, тоді $DN \perp BC$, отже, $\angle DNA = 45°$ як кут нахилу (DBC) до (ABC).

$S_б = S_{ABD} + S_{CBD} + S_{ACD}$.

У ΔABC за теоремою косинусів:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos 120°$;

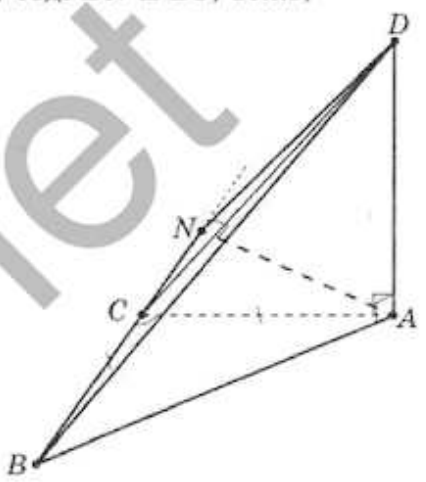
$AB^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2$; $AB = a\sqrt{3}$.

У ΔACN: $\angle N = 90°$, $\angle C = 180° - 120° = 60°$,

$AN = AC \cdot \sin 60° = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

У ΔADN: $\angle A = 90°$; $\angle N = 45°$, $\angle D = 45°$, тому

$AN = AD = a\frac{\sqrt{3}}{2}$; $DN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.



$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2}{4}$. $S_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot ND = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

$S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

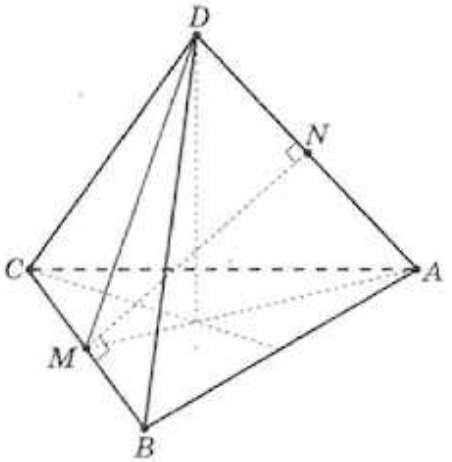
$S_т = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{6}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{4}\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$.

Відповідь: $\frac{a^2}{4}\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$.

11. Нехай $DABC$ — даний правильний тетраедр з ребром 12 см. M — середина BC, N — середина AD, MN — шуканий відрізок.

Тому $MN = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $6\sqrt{2}$ см.



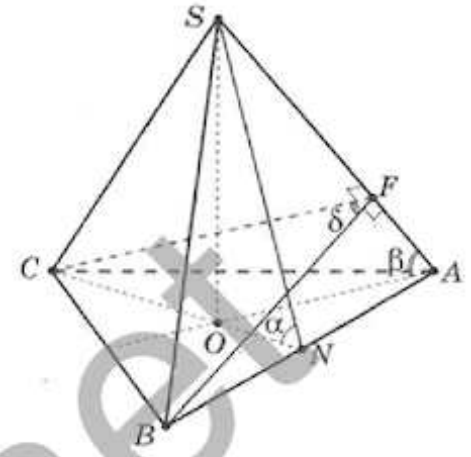
Відрізки, що сполучають середини мимобіжних ребер тетраедра, називають *середніми лініями тетраедра*. Для правильного тетраедра з ребром a довжина середньої лінії $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

alg.net

12. Оскільки відстань між мимобіжними прямими — це довжина їх спільного перпендикуляра, а в тетраедрі середня лінія перпендикулярна ребрам, які вона сполучає, то аналогічно до № 11 маємо: $MN = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $3\sqrt{2}$ см.

13. Нехай $SABC$ — правильна піраміда, основа — правильний ΔABC, SO — висота, точка O — центр ΔABC. SN — апофема, $SN \perp AB$, $SO \perp (ABC)$, тоді $NO \perp AB$, отже, $\angle SNO$ — лінійний кут двогранного кута при основі. Позначимо $\angle SNO = \alpha$. SA — похила, AO — проекція, тому $\angle SAO$ — кут між бічним ребром і основою, позначимо $\angle SAO = \beta$, за умовою $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.



Кут між суміжними бічними гранями — двогранний кут при бічному ребрі. Позначимо міру цього кута δ.

За прикладами 1 і 2 §16:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta \\ \sqrt{3}\sin\alpha = 2\cos\frac{\delta}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

За розв'язанням до задачі 26 §16:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4};\ \beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{2}.\ \cos\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\sin\alpha.$$

$$\cos\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right);\ \frac{\delta}{2} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)\right);$$

$$\delta = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)\right).$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha-1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{17}-3}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)^2}} = \frac{\sqrt{17}-3}{4}\cdot\sqrt{\frac{16}{42-6\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}-3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7-\sqrt{17}}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{17}-3)\cdot\sqrt{7+\sqrt{17}}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7^2-17}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{17}-3)^2\cdot(7+\sqrt{17})}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{(26-6\sqrt{7})\cdot(7+\sqrt{17})}}{8\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{80-16\sqrt{17}}}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}}}{8\sqrt{3}} = \frac{4\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}}}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2\sqrt{3}};$$

$$\delta = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\arccos\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{4}.$$

Відповідь: $2\arccos\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{4}$.

14. Нехай $SABC$ — правильна піраміда, основа — правильний ΔABC, SO — висота, точка O — центр ΔABC. M — середина AS, $OM = AB$. Позначимо δ — міра двогранного кута при бічному ребрі (лінійний кут між суміжними бічними

alor.net

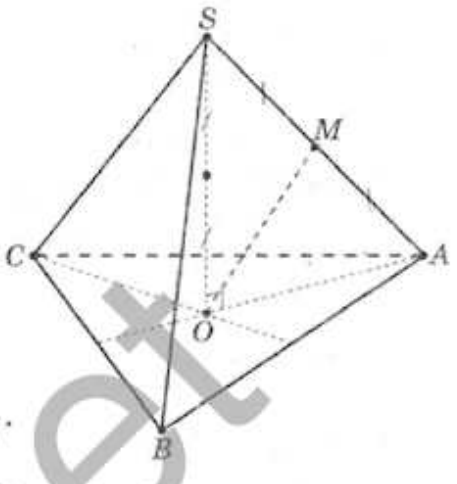
двогранного кута при бічному ребрі (шуканий кут між суміжними бічними

гранями), β — кут нахилу бічного ребра до основи. $SO \perp (ABC)$, SA — похила, AO — проекція, $\angle SAO = \beta$. Нехай $AB = OM = a$, тоді $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

ΔSOA прямокутний, $\angle O = 90°$, AS — гіпотенуза, тоді $OM = \frac{1}{2}SA$;

$SA = 2OM = 2a$; $SO^2 = SA^2 - AO^2$; $SO^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{11a^2}{3}$; $SO = a\sqrt{\frac{11}{3}}$;

$\sin A = \frac{SO}{SA} = \frac{a\sqrt{\frac{11}{3}}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$; $\sin\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$.



За прикладом 2(3) §16:

$\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{3}\sin\beta$; $\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

$\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$;

$$\cos\delta = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2} - 1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2} + 1} = \frac{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{11}{4} - 1}{\frac{11}{4} + 1} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{15}{14}} = \frac{7}{15}.$$

Відповідь: $\cos\delta = \frac{7}{15}$; $\delta = \arccos\frac{7}{15}$.

15. Див. рис. та обґрунтування до № 13. Нехай $SABC$ — правильна трикутна піраміда. ΔABC — правильний зі стороною a, двогранний кут при бічному ребрі 2φ, отже, $\angle BFC = 2\varphi$. Міру двогранного кута при ребрі основи позначимо α, отже, $\angle CNS = \alpha$.

$S_б = \frac{1}{2}P\cdot h$, $P = P_{\Delta ABC} = 3a$; $h = SN$.

У ΔSON: $\angle O = 90°$;

$ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $SN = \frac{ON}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$, $S_б = \frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

За прикладом 2 §16: $\sqrt{3}\sin\alpha = 2\cos\frac{2\varphi}{2}$; $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$;

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{3-4\cos^2\varphi}{3}}$;

$$S_б = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot\frac{\sqrt{3-4\cos^2\varphi}}{\sqrt{3}}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{3-4\cos^2\varphi}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{3-4(1-\sin^2\varphi)}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\varphi-1}}.$$

Відповідь: $\frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\varphi-1}}$.

16. Нехай $ABCD$ — даний тетраедр, $AD \perp BC$, $DB \perp AC$. За властивістю перпендикулярних відрізків: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$.

За правилом чотирьох точок $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$.

Звідси $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$, отже, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ і $AB \perp DC$, тоді за теоремою 3 §17 усі висоти даного тетраедра перетинаються в одній точці і за означенням він є ортоцентричним.

alldz.net

17. Нехай $ABCD$ — даний тетраедр, a і a_1, b і b_1, c і c_1 — відповідні мимобіжні ребра. Використовуючи теорему 1 §17, маємо:

$$h_a^2 = \frac{1}{4}\left(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2\right) \quad h_b^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2\right)$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2\right).$$

За умовою $h_a = h_b = h_c$, $h_a^2 = h_b^2 = h_c^2$. Звідси

$$b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a_1^2 - a^2 = a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2 = a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2.$$

Тоді $b^2 + b_1^2 = a^2 + a_1^2$; $b^2 + b_1^2 - a^2 - a_1^2 = 0$

$b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$; $b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2 = 0$

$a^2 + a_1^2 = c^2 + c_1^2$; $a^2 + a_1^2 - c^2 - c_1^2 = 0$.

Позначимо $\angle(aa_1) = \alpha$, $\angle(bb_1) = \beta$, $\angle(cc_1) = \gamma$.

За прикладом 1 §17: $\cos\alpha = \dfrac{\left|a^2 + a_1^2 - c^2 - c_1^2\right|}{2aa_1} = \dfrac{0}{2aa_1} = 0$, $\alpha = 90°$,

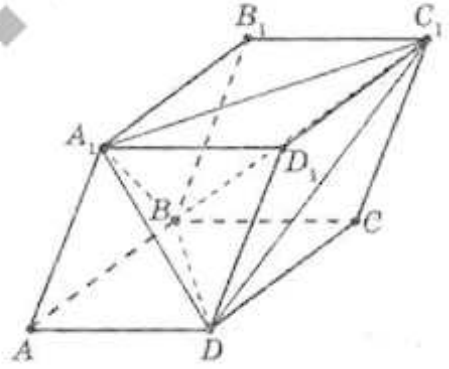
аналогічно $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$, це означає, що мимобіжні ребра даного тетраедра перпендикулярні, отже, всі висоти перетинаються в одній точці і за означенням тетраедр є ортоцентричним.

18. Нехай $ABCD$ — даний тетраедр, a і a_1, b і b_1, c і c_1 — відповідні мимобіжні ребра. За умовою $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$.

Тоді $a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2 = 0$; $a^2 + a_1^2 - c^2 - c_1^2 = 0$; $b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2 = 0$.

Звідси за розв'язанням задачі 17 мимобіжні ребра перпендикулярні, всі висоти перетинаються в одній точці і за означенням тетраедр є ортоцентричним.

19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, грані якого — ромби, отже, всі грані і ребра рівні між собою.



Розглянемо тетраедр A_1C_1BD: ребра $A_1C_1 = DC_1 = BC_1$ як рівні більші діагоналі рівних ромбів, а ребра $A_1D = A_1B = BD$ як рівні менші діагоналі рівних ромбів. Тобто тетраедр A_1C_1BD є правильною пірамідою з вершиною C_1 і правильним ΔA_1BD — основою. За наслідком з теореми 4 §17 A_1C_1BD — ортоцентричний тетраедр.

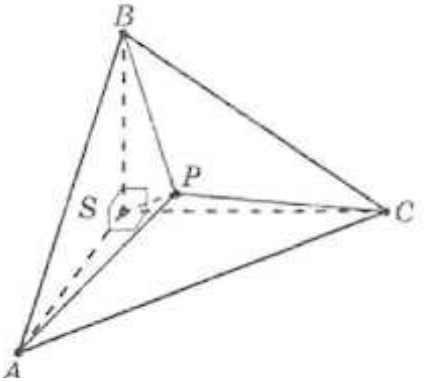
20. $SABC$ — трикутна піраміда, S — вершина ΔABC — основа.

$(SAB) \perp (SBC) \perp (SAC)$; $S_{SAB} : S_{SBC} : S_{SAC} = 2 : 6 : 9$, $S_{\Delta ABC} = 66$ см^2.

Даний тетраедр прямокутний з основою ACB. Тоді його вершина S проектується на грань ABC у її ортоцентр P.

Позначимо $S_{SAB} = 2x$, $S_{SBC} = 6x$; $S_{SAC} = 9x$, $x > 0$.

За прикладом 8 §17:



$$S_{CPB} = \frac{S_{CSB}^2}{S_{ABC}}; \quad S_{APC} = \frac{S_{ASC}^2}{S_{ABC}}; \quad S_{APB} = \frac{S_{ASB}^2}{S_{ABC}}.$$

Тоді $S_{CPB} + S_{APC} + S_{APB} = \dfrac{S_{CSB}^2 + S_{ASC}^2 + S_{ASB}^2}{S_{ABC}}$;

$$S_{ABC} = \frac{S_{CSB}^2 + S_{ASC}^2 + S_{ASB}^2}{S_{ABC}};$$

$$S_{ABC}^2 = S_{CSB}^2 + S_{ASC}^2 + S_{ASB}^2;$$

$66^2 = (2x)^2 + (6x)^2 + (9x)^2$

alex.net

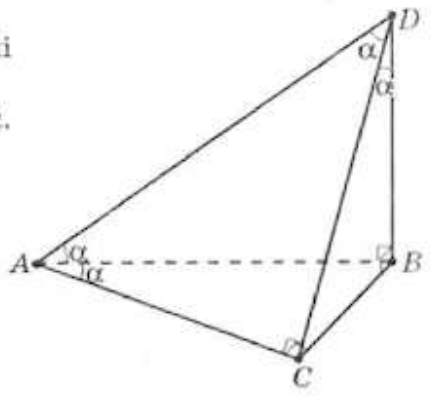
$66^2 = 4x^2 + 36x^2 + 81x^2$
$66^2 = 121x^2$
$66^2 = (11x)^2$
$66 = 11x$; $x = 6$.
$S_б = S_{CSB} + S_{ASC} + S_{ASB} = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 9 \cdot 6 = (2 + 6 + 9) \cdot 6 = 102$ (см^2).
Відповідь: 102 см^2.

21. Нехай $SABC$ — трикутна піраміда, S — вершина, ΔABC — основа, $(SAB) \perp (SBC) \perp (SAC)$; даний тетраедр прямокутний з основою ABC, тоді його вершина S проектується на грань ABC у її ортоцентр P. За прикладом 8 §17 і за розв'язанням задачі 20 §17 маємо:
$S^2_{ABC} = S^2_{CSB} + S^2_{ASC} + S^2_{ASB}$.

22. $DABC$ — тетраедр, D — вершина, ΔABC — основа, $(DAB) \perp (DBC) \perp (DAC)$; $S_{ADB} = S$, $S_{ACB} = S_1$; $S_{AHB} = S_2$; даний тетраедр прямокутний з основою ABC, тоді його вершина D проектується на грань ABC у її ортоцентр H.
За прикладом 8 §17:
$$S_{AHB} = \frac{S^2_{ADB}}{S_{ABC}};\ S_2 = \frac{S^2}{S_1};\ S_2 \cdot S_1 = S^2;\ S^2 = S_1 \cdot S_2;\ S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

23. Нехай $SABC$ — трикутна піраміда, S — вершина, ΔABC — основа.
$SA \perp SB \perp SC$, отже, $(SAB) \perp (SBC) \perp (SAC)$. Позначимо $SA = 2n - 2$, тоді $SB = 2n$, $SC = 2n + 2$, де $n \in N$, $n \geq 2$ $S_{ABC} = 14$ см^2.
Оскільки даний тетраедр прямокутний, то за розв'язком задачі 21 маємо:
$S^2_{ABC} = S^2_{CSB} + S^2_{ASC} + S^2_{ASB}$.
Бічні грані — прямокутні трикутники, бічні ребра — їхні катети, тоді:
$$S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n - 2) = n \cdot (2n - 2) = 2n^2 - 2n;$$
$$S_{\triangle ASC} = \frac{1}{2} SA \cdot SC = \frac{1}{2}(2n - 2)(2n + 2) = \frac{1}{2} \cdot 2(n - 1)(2n + 2) = 2n^2 - 2n + 2n - 2 = 2n^2 - 2;$$
$$S_{\triangle CSB} = \frac{1}{2} SC \cdot SB = \frac{1}{2}(2n)(2n + 2) = n(2n + 2) = 2n^2 + 2n;$$
$14^2 = (2n^2 - 2n)^2 + (2n^2 - 2)^2 + (2n^2 + 2n)^2$
$14^2 = 4n^4 - 8n^3 + 4n^2 + 4n^4 - 8n^2 + 4 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2$
$14^2 = 12n^4 + 8n^2 + 4 - 8n^2$
$12n^2 + 4 = (2 \cdot 7)^2$
$4(3n^4 + 1) = 4 \cdot 49$
$3n^4 + 1 = 49$
$3n^4 = 48$
$n^4 = 16$, $n = \pm 2$, $n \geq 2$, тоді $n = 2$
$S_б = S_{CSB} + S_{ASC} + S_{ASB} = 2n^2 - 2n + 2n^2 - 2 + 2n^2 + 2n = 6n^2 - 2$
$S_б = 6 \cdot 2^2 - 2 = 22$ (см^2).
Відповідь: 22 см^2.

24. Нехай $ABCD$ — даний тетраедр, грані — подібні прямокутні трикутники.
$\Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta DCB \sim \Delta DAC$ з гострим кутом α.
Позначимо AD за x, тоді:
у ΔADB: $\angle B = 90°$; $\angle A = \alpha$; $AD = x$;
$AB = x \cos \alpha$; $DB = x \sin \alpha$;
у ΔDAC: $\angle C = 90°$; $\angle D = \alpha$; $AD = x$;
$AC = x \sin \alpha$; $DC = x \cos \alpha$;
у ΔABC: $\angle C = 90°$; $\angle A = \alpha$; $AB = x \cos \alpha$;
$AC = x \sin \alpha$; $BC = x \sin \alpha \cos \alpha$.



aldz.net

Тоді в ΔDCB: $\angle B = 90^\circ$; $\angle D = \alpha$; $DB = x \sin\alpha$; $BC = x \sin\alpha \cos\alpha$; $DC = x\cos\alpha$;
$DC^2 = DB^2 + BC^2$. $(x\sin\alpha)^2 + (x\sin\alpha\cos\alpha)^2 = (x\cos\alpha)^2$;
$x^2\sin^2\alpha + x^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = x^2\cos^2\alpha \mid : x^2$, $x^2 \neq 0$;
$(1-\cos^2\alpha) + (1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha = \cos^2\alpha$; $1 - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha = \cos^2\alpha$;
$\cos^4\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0$. Заміна: $\cos^2\alpha = t$, $t > 0$. $t^2 + t - 1 = 0$; $D = 1 - 4\cdot(-1) = 5$;

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};\quad t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0;\quad t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0.\quad \cos^2\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{5}+1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Найбільшим є ребро AD, $|AD| = x$, найменшим — BC, $|BC| = x\sin\alpha\cos\alpha$.

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{x}{x\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{4}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{5}-3+\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{4\sqrt{5}-8}} = \frac{2}{\sqrt{4(\sqrt{5}-2)}} = \frac{1\sqrt{\sqrt{5}+2}}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}} = \sqrt{\sqrt{5}+2}.$$

Відповідь: $\frac{|AD|}{|BC|} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$.

§ 18. Властивості циліндра

$S_б = 2\pi rH$ — площа бічної поверхні.
$S_п = 2\pi rH + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+H)$ — площа повної поверхні.
r — радіус основи, H — висота циліндра.

Завдання 15

1. 1) ні; 2) так, переріз, паралельний висоті; 3) ні; 4) так, переріз, паралельний висоті.

2. Оскільки ГМТ, рівновіддалених від даної, — коло, то ГМТ, рівновіддалених від даної прямої, — множина таких кіл, що утворює циліндричну поверхню.

3. Циліндрична поверхня.

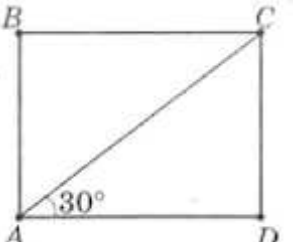
4. $H = 3r$, $S_б = 288\pi$ см^2. $288\pi = 2\pi rH$; $288\pi = 2\pi r\cdot 3r$; $48 = r^2$;
$r = 4\sqrt{3}$ см; $H = 12\sqrt{3}$ см.

Відповідь: $r = 4\sqrt{3}$ см; $H = 12\sqrt{3}$ см.

5. $S_б = 2S_{осн.}$; $2\pi rH = 2\pi r^2$; $r = H$;
$S_п = 500\pi$ см^2; $S_п = 2\pi r(r+H)$; $2\pi r(r+r) = 500\pi$; $2\pi\cdot 2r^2 = 500\pi$; $4r^2 = 500$;
$r^2 = 125$; $r = 5\sqrt{5} = 4$.

Відповідь: $r = H = 5\sqrt{5}$ см.

6. Прямокутник $ABCD$ — розгортка бічної поверхні циліндра, $AC = 4$ см, $\angle CAD = 30^\circ$, CD — висота циліндра.



У ΔCAD: $\angle D = 90^\circ$; $CD = AC\cdot\sin 30^\circ = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ (см);

$AD = AC\cdot\cos 30^\circ = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см).

alds.net

30*

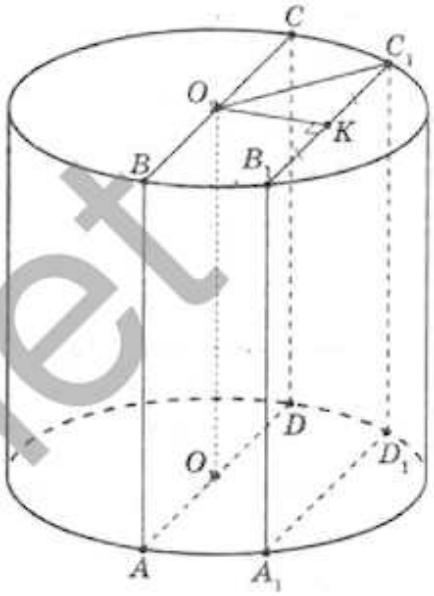
$AD = 2r$; $r = \frac{1}{2}AD = \sqrt{3}$ (см).

$S_{п.} = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot \sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 2\right) = 2\sqrt{3}\pi\left(2 + \sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}\pi + 6\pi = \left(4\sqrt{3} + 6\right)\pi$ (см²).

Відповідь: $S_{п.} = \left(4\sqrt{3} + 6\right)\pi$ см².

7. $S_б = 2\pi rH$, $\pi = 3$.
$S_б = 530 \cdot 727 \cdot 3 = 1\,155\,930$ (см²) — $S_{барбана}$.
225 м = 225 000 мм
225 000 · 17 = 3 825 000 (см²) — $S_{троса}$.
3 825 000 : 1 155 930 = 3,3.
Відповідь: 3 повні шари і 0,3 четвертого шару.

8. Нехай на малюнку зображено даний циліндр, O_1 і O_2 — центри основ, O_1O_2 — відрізок осі циліндра, є висотою. $ABCD$ — прямокутник — осьовий переріз циліндра, $AB \parallel CD \parallel O_1O_1$; O_1 і O_2 — середини AD і BC відповідно, $S_{ABCD} = 300$ см². $A_1B_1C_1D_1$ — переріз циліндра, $(A_1B_1C_1) \parallel O_1O_2$, площини основ циліндра перпендикулярні до осі, проведемо $O_2K \perp B_1C_1$, тоді $O_2K \perp (A_1B_1C_1)$, O_2K — задана відстань, K — середина B_1C_1.



1) $O_2K = \frac{1}{2}r$, r — радіус основи.

У ΔC_1O_2K: $\angle K = 90°$; $O_2C_1 = r$,

$O_2K = \frac{1}{2}r$; тоді $C_1K = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

За властивістю перпендикуляра з центра кола до хорди: $C_1K = \frac{1}{2}C_1B_1$; $C_1B_1 = r\sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = H \cdot 2r$; $Hr = 150$.

$S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1 \cdot B_1C_1 = H \cdot r\sqrt{3} = (Hr) \cdot \sqrt{3} = 150\sqrt{3}$ (см²).

2) $O_2K = 0{,}6r$.

У ΔC_1O_2K: $C_1K^2 = O_2C_1^2 - O_2K^2 = r^2 - (0{,}6r)^2 = (0{,}8r)^2$; $C_1K = \frac{1}{2}C_1B_1$; $C_1K = 0{,}8r$;

$C_1B_1 = 1{,}6r$.

$S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1 \cdot B_1C_1 = H \cdot 1{,}6r = (Hr) \cdot 1{,}6 = 150 \cdot 1{,}6 = 240$ (см²).

Відповідь: 1) $150\sqrt{3}$ см²; 2) 240 см².

9. Осьовий переріз циліндра — прямокутник, дві сторони якого є висотами, а дві — діаметрами основ циліндра. Позначимо їх H і D. $P = 46$ см; $P = (D + H) \cdot 2 = 46$; $D + H = 23$; $d^2 = H^2 + D^2$; $H^2 + D^2 = 19^2$.

Маємо: $\begin{cases} D + H = 23, \\ H^2 + D^2 = 19^2; \end{cases}$ $\begin{cases} D = 23 - H, \\ H^2 + (23 - H)^2 = 361^2; \end{cases}$

$H^2 + 529 - 46H + H^2 - 361 = 0$; $2H^2 - 46H + 168 = 0 \mid : 2$; $H^2 - 23H + 84 = 0$;

$H_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 84}}{2} = \frac{23 \pm \sqrt{193}}{2}$;

$H_1 = \frac{23 + \sqrt{193}}{2}$; $D_1 = 23 - \frac{23 + \sqrt{193}}{2} = \frac{23 - \sqrt{193}}{2}$;

alor.net

$H_2 = \frac{23 - \sqrt{193}}{2}$; $D_2 = 23 - \frac{23 - \sqrt{193}}{2} = \frac{23 + \sqrt{193}}{2}$.

$S_{пер.} = H \cdot D$; $S = \frac{23 + \sqrt{193}}{2} \cdot \frac{23 - \sqrt{193}}{2} = \frac{23^2 - 193}{4} = 84$ (см²).

Відповідь: 84 см².

10. Осьовий переріз циліндра — прямокутник, дві сторони якого є висотами, а дві — діаметрами основ циліндра. Твірна є висотою, H — висота. Діагональ перерізу $d = 25$ см. $r = 5 + H$.

Маємо: $\begin{cases} d^2 = H^2 + D^2, \\ r = 5 + H; \end{cases}$ $\begin{cases} 25^2 = H^2 + (2r)^2, \\ r = 5 + H; \end{cases}$ $\begin{cases} 25^2 = H^2 + 4r^2, \\ r = 5 + H; \end{cases}$

$625 = H^2 + 4(5 + H)^2$; $H^2 + 4(25 + 10H + H^2) - 625 = 0$;
$H^2 + 100 + 40H + 4H^2 - 625 = 0$; $5H^2 + 40H - 525 = 0 \mid : 5$;
$H^2 + 8H - 105 = 0$;

$H_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 105}}{2} = \frac{-8 \pm 22}{2}$; $H_1 = -15 < 0$; $H_2 = \frac{-8 + 22}{2} = 7$ (см).

$r = 5 + 7 = 12$ (см); $D = 2r = 24$ (см). $S_{пер.} = H \cdot D = 7 \cdot 24 = 168$ (см²).
Відповідь: $S = 168$ см².

11. Див. рис. до № 6 §18.
Розгортка бічної поверхні циліндра — квадрат, отже, $H = 2\pi r$.
Осьовий переріз циліндра — прямокутник $ABCD$ зі сторонами H і $2r$.

У ΔACD: $CD = H$, $AD = 2r$; $\operatorname{tg} \angle A = \frac{CD}{AD} = \frac{H}{2r} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$; $\angle A = \operatorname{arctg} \pi$.

Кут між діагоналями прямокутника вдвічі більший за кут між діагоналлю і стороною, тобто $\varphi = 2 \operatorname{arctg} \pi$.
Відповідь: $2 \operatorname{arctg} \pi$.

12. Див. рис. і позначення до задачі № 8 §18. r — радіус циліндра, $S_{ABCD} = 2S_{A_1B_1C_1D_1}$, $AB \cdot BC = 2A_1B_1 \cdot B_1C_1$.

Оскільки $AB = A_1B_1$, то $BC = 2B_1C_1$, тоді $O_2C = 2KC_1$; $r = 2KC_1$; $KC_1 = \frac{r}{2}$.

У ΔO_2C_1K: $\angle K = 90°$; $O_2C_1 = r$, $C_1K = \frac{r}{2}$, $O_2K = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

13. Див. рис. і позначення до задачі № 8 §18. $S_{ABCD} = Q = H \cdot 2r$; $Hr = \frac{Q}{2}$.

1) $O_2K = \frac{r}{2}$. У ΔO_2C_1K: $\angle K = 90°$; $O_2C_1 = r$, $O_2K = \frac{r}{2}$, тоді $KC_1 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$,

$B_1C_1 = 2KC_1 = r\sqrt{3}$. $S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1 \cdot B_1C_1 = H \cdot r\sqrt{3} = \frac{Q\sqrt{3}}{2}$.

2) $O_2K = \frac{3}{5}r = 0{,}6r$. У ΔO_2C_1K: $\angle K = 90°$; $O_1C_1 = r$, $O_2K = 0{,}6r$,
тоді $KC_1 = 0{,}8r$, $B_1C_1 = 1{,}6r$.

$S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1 \cdot C_1D_1 = H \cdot 1{,}6r = 1{,}6Hr = 1{,}6\frac{Q}{2} = 0{,}8Q$.

Відповідь: 1) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; 2) $0{,}8Q$.

alldz.net

14. Див. рис. і позначення до № 8 §18.

$r = 61$ см, $H = 22$ см (твірна дорівнює висоті циліндра).

Переріз $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, $A_1B_1 = B_1C_1 = H = 22$ см, $C_1K = 11$ см.

У ΔO_2C_1K: $\angle K = 90°$; $O_2C_1 = r = 61$ см; $C_1K = 11$ см.

$O_2K^2 = O_2C_1^2 - KC_1^2$; $O_2K^2 = 61^2 - 11^2 = (61 - 11)(61 + 11) = 50 \cdot 72 = 25 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 2$;

$O_2K = \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 36} = 5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$ (см).

Відповідь: 60 см.

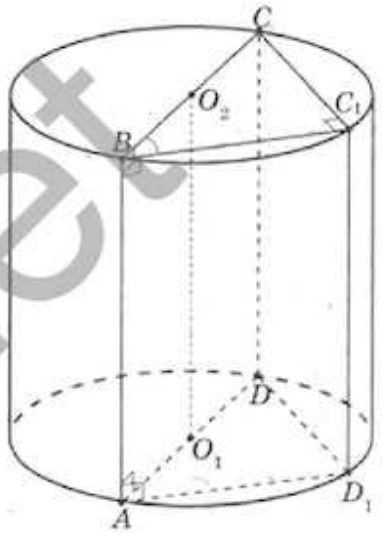
15. Нехай на малюнку зображено даний циліндр, O_1 і O_2 — центри основ, O_1O_2 — відрізок осі циліндра є висотою. Прямокутник $ABCD$ — осьовий переріз циліндра, $AB \parallel O_1O_2 \parallel CD$, AD і BC — діаметри основ. $S_{ABCD} = Q$. ABC_1D_1 — переріз циліндра — прямокутник. $CB \perp AB$, $C_1B \perp AB$ (як сторони прямокутників), тоді $\angle CBC_1 = \alpha$ — лінійний кут двогранного кута з ребром AB і гранями (ABC) і (ABC_1).

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = Q = H \cdot 2r$; $S_{ABC_1D_1} = AB \cdot BC_1 = H \cdot BC_1$.

У ΔBCC_1: BC — діаметр кола, отже, $\angle BC_1C = 90°$.

$BC_1 = BC \cdot \cos\alpha = 2r \cdot \cos\alpha$.

$S_{ABC_1D_1} = H \cdot 2r\cos\alpha = Q \cdot \cos\alpha$.



$$S_{\text{пер.}} = S_{\text{осн.}} \cdot \cos\alpha.$$

1) $\alpha = 60°$; $S_{ABC_1D_1} = Q \cdot \cos 60° = Q \cdot \frac{1}{2} = \frac{Q}{2} = 0{,}5Q$;

2) $\alpha = 45°$; $S_{ABC_1D_1} = Q \cdot \cos 45° = Q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}5\sqrt{2}Q$;

3) $\alpha = 30°$; $S_{ABC_1D_1} = Q \cdot \cos 30° = Q \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}5\sqrt{3}Q$.

Відповідь: 1) $0{,}5Q$; 2) $0{,}5\sqrt{2}Q$; 3) $0{,}5\sqrt{3}Q$.

16. Див. рис. і позначення до № 8 §18. $S_{A_1B_1C_1D_1} = 8$ см^2; $O_2K = \sqrt{3}$ см; $\cup B_1C_1 = 60°$, тоді $\angle B_1O_2C_1 = 60°$.

У $\Delta B_1O_2C_1$: $B_1O_2 = C_1O_2 = r$; $\angle B_1O_2C_1 = 60°$, тоді це рівносторонній трикутник, $B_1C_1 = r$, O_2K — висота і медіана, $O_2K = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $r = 2$ (см).

$S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1 \cdot B_1C_1 = H \cdot r = 8$; $H = \frac{8}{r} = \frac{8}{2} = 4$ (см).

$S_{\text{п}} = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 2(2 + 4) = 24\pi$ (см^2).

Відповідь: 24π см^2.

17. Якщо твірні циліндра перпендикулярні до сторін ΔABC, $AB = 15$ см, $BC = 28$ см, $AC = 41$ см і дотикаються до них, то даний трикутник вписаний у коло основи циліндра, тоді

$R = \frac{abc}{4S}$; $P_\Delta = 15 + 28 + 41 = 84$ (см); $S_\Delta = \sqrt{42(42 - 15)(42 - 28)(42 - 41)}$;

$S_\Delta = \sqrt{42 \cdot 27 \cdot 14 \cdot 1} = \sqrt{6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7} = 7 \cdot 6 \cdot 3$. $R = \frac{15 \cdot 28 \cdot 41}{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 41}{6}$; $D = 2R$;

$D = \frac{5 \cdot 41}{6} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 41}{3} = \frac{205}{3} = 68\frac{1}{3}$ (см), або описаний навколо кола основи циліндра, тоді $S_\Delta = r \cdot p$; $r = \frac{2S_\Delta}{P_\Delta} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3}{84} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ (см); $D = 2r = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

aldz.net

Відповідь: якщо основа циліндра — коло, описане навколо трикутника, діаметр $68\frac{1}{3}$ см; якщо основа циліндра — коло, вписане в трикутник, діаметр 6 см.

18. Нехай на малюнку зображено даний циліндр, O і O_1 — центри основ, OO_1 — відрізок осі циліндра, є висотою. AA_1B_1B і AA_1C_1C — перерізи циліндра — прямокутники, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel OO_1$, тоді $A_1B_1 \perp AA_1$, $C_1A_1 \perp AA_1$, отже, $\angle B_1A_1C_1 = 60°$ — лінійний кут двогранного кута з ребром AA_1 і гранями (AA_1B_1) і (AA_1C_1).

$S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot A_1B_1 = 11$ см^2; $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot A_1C_1 = 13$ см^2; $\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{13}{11}$.

Позначимо $A_1C_1 = 13x$, $A_1B_1 = 11x$, $x > 0$, тоді $AA_1 = \frac{1}{x} = H$.

$\Delta A_1B_1C_1$ — вписаний у коло основи циліндра.

За теоремою косинусів:

$B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos 60°$.

$B_1C_1^2 = (11x)^2 + (13x)^2 - 2 \cdot 11x \cdot 13x \cdot \frac{1}{2}$;

$B_1C_1^2 = 121x^2 + 169x^2 - 143x^2 = 147x^2$;

$B_1C_1 = \sqrt{147x^2} = 7x\sqrt{3}$.

За теоремою синусів: $2R = \frac{B_1C_1}{\sin 60°}$;

$R = \frac{7x\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 7x$.

$S_{б.} = 2\pi RH$; $S_{б.} = 2\pi \cdot 7x \cdot \frac{1}{x} = 14\pi$ (см^2).

Відповідь: 14π см^2.

19. Див. рис. і позначення до № 18 §18.

$S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot A_1B_1 = 32$ см^2; $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot A_1C_1 = 42$ см^2;

$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{42}{32} = \frac{21}{16}$; $A_1C = 21x$; $A_1B_1 = 16x$, $x > 0$; $AA_1 = \frac{2}{x} = H$.

За теоремою косинусів: $B_1C_1^2 = (21x)^2 + (16x)^2 - 2 \cdot 21x \cdot 16x \cdot \cos\alpha$.

$B_1C_1^2 = 441x^2 + 256x^2 - 2 \cdot 336x^2 \cos\alpha$.

1) $\alpha = 60°$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $B_1C_1^2 = 697x^2 - 2 \cdot 336x^2 \cdot \cos 60°$; $B_1C_1^2 = 361x^2$;

$B_1C_1 = 19x$. $S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot B_1C_1 = \frac{2}{x} \cdot 19x = 38$ (см^2).

2) $\alpha = 120°$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$; $B_1C_1^2 = 697x^2 + 2 \cdot 336x^2 \cdot \frac{1}{2}$;

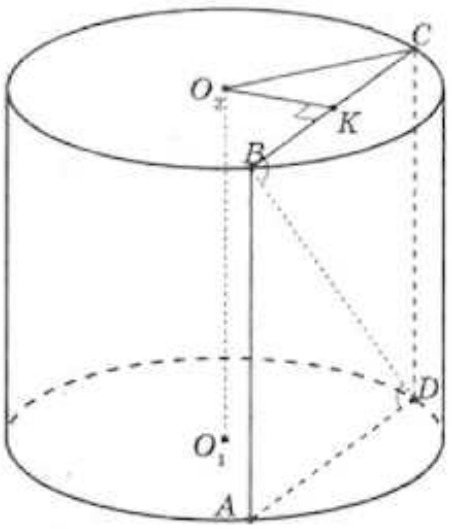
$B_1C_1^2 = 1033x^2$; $B_1C_1 = \sqrt{1033}x$; $S_{BB_1C_1C} = \frac{2}{x} \cdot \sqrt{1033}x = 2\sqrt{1033}$ (см^2).

Відповідь: 1) 38 см^2; 2) $2\sqrt{1033}$ см^2.

20. Нехай на малюнку зображено даний циліндр, O_1 і O_2 — центри основ, O_1O_2 — відрізок осі циліндра, є висотою. Пряма перетинає основи циліндра в точках B і D. Проведемо твірні BA і DC, тоді $ABCD$ — прямокутник, BD — діагональ. $AB \perp (AO_1D)$, $DC \perp (CO_2B)$, BD — похила, AD і BC — відповідні проекції на площини основ, тоді $\angle ADB = \angle CBD = 60°$ — кути нахилу BD до площин основ.

alloz.net

Проведемо $O_2K \perp BC$; $O_1O_2 \parallel (ABD)$, $O_1O_2 \perp (BO_2C)$, $(ABD) \perp (BO_2C)$, $O_2K \subset (BO_2C)$, $BD \subset (ABD)$, тоді O_2K — відстань від осі до (ABD), а отже, і до прямої BD, $O_2K = 5$ см.
$O_2C = R = 13$ см.
Оскільки BC — хорда, $O_2K \perp BC$, то K — середина BC; $KC = \frac{1}{2}BC$.



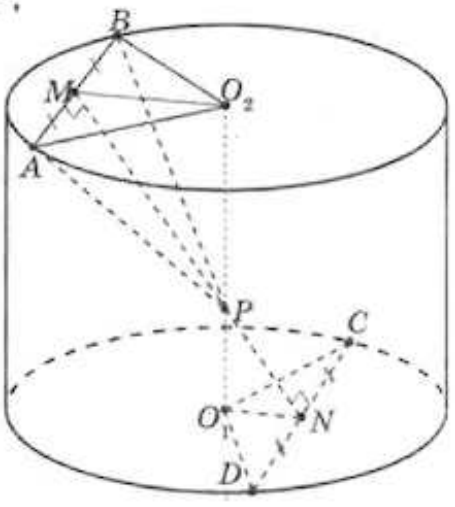
У ΔO_2KC: $\angle K = 90°$; $KC^2 = O_2C^2 - O_2K^2$;
$KC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; $KC = 12$ см.
$BC = 2 \cdot 12 = 24$ (см).

У ΔDBC: $\angle C = 90°$; $\angle B = 60°$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{CD}{BC}$;

$CD = BC \cdot \operatorname{tg}\beta = 24 \cdot \operatorname{tg} 60°$; $CD = 24 \cdot \sqrt{3}$ см.

Відповідь: $24\sqrt{3}$ см.

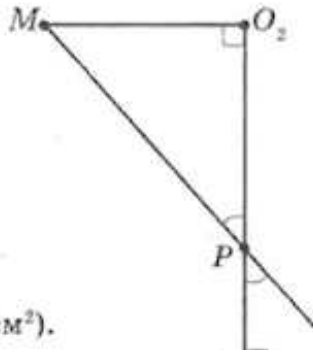
21. Нехай на малюнку зображено даний циліндр, O_1 і O_2 — центри основ, O_1O_2 — відрізок осі циліндра, є висотою, $R = 5$ см.
Площина φ перетинає основи циліндра по хордам $AB = 6$ см і $CD = 8$ см. Оскільки основи циліндри — паралельні, то $AB \parallel CD$. P — точка перетину φ і O_1O_2.
$PO_2 \perp (AO_2B)$, PA і PB — похилі, O_2A і O_2B — проекції; $O_2A = O_2B = R$, тоді $PA = PB$, відмітимо M — середину AB, тоді $O_2M \perp AB$, $PM \perp AB$, отже, $(PO_2M) \perp AB$, а значить, $(PO_2M) \perp CD$, N — точка перетину, $PN \perp CD$; $PO_1 \perp (CO_1D)$, PN — похила, O_1N — проекція, тоді $O_1N \perp CD$ (за теоремою про три перпендикуляри), N — середина CD, отже, $MN \perp AB$, $MN \perp CD$, MN — відстань між хордами, $MN = 9$ см.
У ΔMBO_2: $\angle M = 90°$; $BO_2 = 5$ см, $MB = 3$ см, тоді $O_2M = 4$ см.
У ΔNCO_1: $\angle N = 90°$, $CO_1 = 5$ см, $CN = 4$ см, тоді $O_1N = 3$ см.
$\Delta MO_2P \sim \Delta NO_1P$ за двома кутами: $\angle O_2 = \angle O_1 = 90°$,
$\angle MPO_2 = \angle NPO_1$ як вертикальні:
$\frac{MO_2}{NO_1} = \frac{MP}{NP} = \frac{O_2P}{O_1P}$.



Позначимо NP за x, тоді $MP = 9 - x$.
$\frac{x}{9-x} = \frac{3}{4}$; $4x = 27 - 3x$; $7x = 27$;
$x = \frac{27}{7}$; $NP = \frac{27}{7}$.
У ΔPO_1N: $\angle O_1 = 90°$,

$PO_1^2 = PN^2 - O_1N^2 = \left(\frac{27}{7}\right)^2 - 3^2 = \frac{27^2}{49} - 9 = \frac{32 \cdot 9}{49}$;

$PO_1 = \frac{3}{7} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{12}{7}\sqrt{2}$. Оскільки $\frac{MO_2}{NO_1} = \frac{O_2P}{O_1P}$, то



$O_2P = \frac{MO_2 \cdot O_1P}{NO_1} = \frac{4 \cdot \frac{12}{7}\sqrt{2}}{3} = \frac{16}{7}\sqrt{2}$.

$O_1O_2 = O_1P + PO_2 = \frac{12}{7}\sqrt{2} + \frac{16}{7}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (см).

$S_{б.} = 2\pi R \cdot (R + H) = 2\pi \cdot 5 \cdot \left(5 + 4\sqrt{2}\right) = 10\pi\left(5 + 4\sqrt{2}\right)$ (см^2).

aldz.net

Відповідь: $10\pi\left(5+4\sqrt{2}\right)$ см^2.



22. Див. рис. і позначення до задачі № 18 §18.

$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 10\sqrt{5}$ см²; $S_{CC_1B_1B} = 40$ см².

$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC$; $S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot AB$; $AA_1 \cdot AC = A_1A \cdot AB$; $AC = AB$.

Позначимо AB і AC за x і y відповідно ($x > 0$, $y > 0$), $AA_1 = H$.

Маємо: $Hx = 10\sqrt{5}$; $Hy = 40$; $\dfrac{Hx}{Hy} = \dfrac{10\sqrt{5}}{40}$; $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$; $x = y \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

У ΔABC проведемо висоту h (висота рівнобедреного трикутника є медіаною), тоді

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{y\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{16}; \quad h = \frac{y}{4}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot h = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{y}{4} = \frac{y^2}{8}. \quad R_{ABC} = \frac{x \cdot x \cdot y}{4S_{\Delta ABC}}; \quad R = \frac{\left(y \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 \cdot y}{4 \cdot \frac{y^2}{8}} = \frac{5}{8}y.$$

Оскільки $Hy = 40$, то $H = \dfrac{40}{y}$.

Маємо: $S_б = 2\pi RH = 2\pi \cdot \dfrac{5}{8}y \cdot \dfrac{40}{y} = 50\pi$ (см²).

Відповідь: 50π см².

23. Нехай $ABCD$ — даний квадрат, площина квадрата перетинає вісь циліндра в точці P, а основи по хордах AB і CD. Див. рис. і позначення до задачі № 21, враховуючи $AB = CD$ (сторони квадрата). $R = 7$ см, $AB = CD = 10$ см. Точки M і N — середини сторін, $MN \perp AB$, $MN \perp CD$, тоді $MN = AB = CD = 10$ см (за властивістю квадрата), $O_2M = O_2N$, $PM = PN$, тобто P — середина O_1O_2.

У ΔMBO_2: $\angle M = 90°$; $BO_2 = 7$ см, $MB = \dfrac{1}{2}AB = 5$ см; $MO_2^2 = BO_2^2 - BM^2$;

$MO_2^2 = 7^2 - 5^2 = 24$; $MO_2 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (см).

У ΔMPO_2: $\angle O_2 = 90°$; $MP^2 = MO_2^2 + PO_2^2$; $MP = \dfrac{1}{2}MN = 5$ см. $PO_2^2 = MP^2 - MO_2^2$;

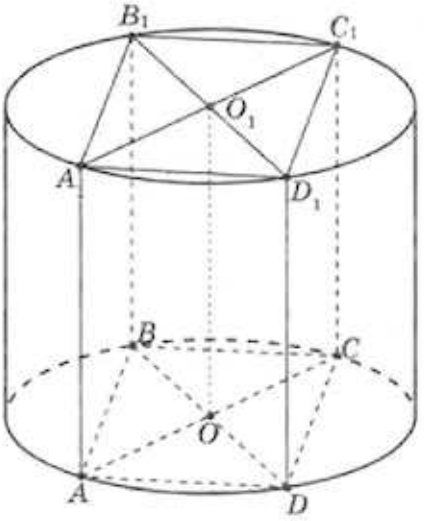
$PO_2^2 = 5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 25 - 24 = 1$; $PO_2 = 1$ см; $O_1O_2 = 2PO_2 = 2$ см $= H$.

$S_п = 2\pi R(R + H)$; $S_п = 2\pi \cdot 7 \cdot (7 + 2) = 126\pi$ (см²).

Відповідь: 126π см².

24. Нехай O і O_1 — центри основ даного циліндра, OO_1 — відрізок осі циліндра, є висотою. Оскільки паралелепіпед вписаний у циліндр, то його основи — паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, вписані в основи циліндра, отже, вони є прямокутниками або квадратами, причому точки O і O_1 — центри цих чотирикутників — точки перетину діагоналей. Тоді $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \parallel OO_1$.

$OO_1 \perp (ABC)$, $OO_1 \perp (A_1B_1C_1)$, отже, паралелепіпед є прямокутним. Діагоналі чотирикутників є діаметрами циліндра, бічні ребра — твірні циліндра, $AA_1 = OO_1 = 20$ см. Оскільки паралелепіпед правильний, то $ABCD$ — квадрат. $AO = BO = CO = DO = R =$ $= 10$ см, тоді $AB = 10\sqrt{2}$ см.



alldz.net

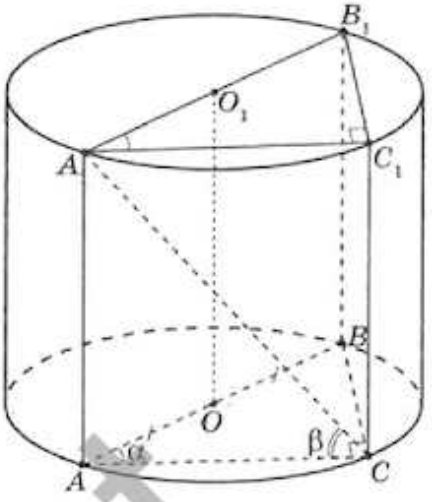


$S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = P \cdot H + 2S_{ABCD} = 4 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 20 + 2 \cdot \left(10\sqrt{2}\right)^2 =$

$= 800\sqrt{2} + 400 = 400\left(2\sqrt{2} + 1\right)$ (см²).

Відповідь: $400\left(2\sqrt{2} + 1\right)$ см².

25. Нехай на малюнку зображено даний циліндр, O і O_1 — центри основ, OO_1 — відрізок осі циліндра, є висотою. У даний циліндр вписана трикутна призма (пряма) $ABCA_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Тоді ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ вписані в кола основ циліндра, O і O_1 — середини гіпотенуз AB і A_1B_1, бічні ребра призми є твірними циліндра. $\angle BAC = \alpha$, $AC = a$; $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1 \perp (ABC)$, A_1C — похила, AC — проекція, тому $\angle ACA_1 = \beta$ — кут між A_1C і (ABC).



У ΔACA_1: $\angle A = 90°$; $\operatorname{tg}\angle C = \dfrac{AA_1}{AC}$;

$AA_1 = AC \cdot \operatorname{tg}\angle C = a \cdot \operatorname{tg}\beta = H$.

У ΔABC: $\angle C = 90°$; $\cos\angle A = \dfrac{AC}{AB}$; $AB = \dfrac{AC}{\cos\angle A}$; $AB = \dfrac{AC}{\cos\alpha}$.

$AB = 2R$; $R = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$. $S_{б.} = 2\pi RH = 2\pi \cdot \dfrac{a}{2\cos\alpha} \cdot a\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$.

26. Якщо правильна чотирикутна призма описана навколо циліндра, то кола основи циліндра, вписані в основи призми, — квадрати, центри основ циліндра — точки перетину діагоналей квадратів, бічне ребро призми дорівнює твірній циліндра і є висотою призми і циліндра. Позначимо сторону квадрата a, радіус циліндра r, висоту призми і циліндра H.

За умовою $S_{б.\,пр.} = Q$; $S_{б.\,пр.} = P \cdot H = 4a \cdot H = Q$. $S_{б.\,ц.} = 2\pi RH$; $a = 2r$.

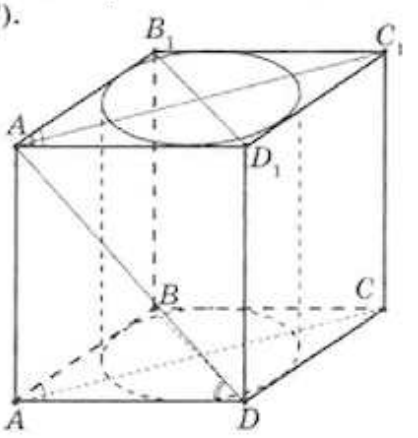
Маємо: $4a \cdot H = Q$; $4 \cdot 2rH = Q$; $2rH = \dfrac{Q}{4}$, тоді $S_{б.\,ц.} = \pi \cdot 2rH = \pi \cdot \dfrac{Q}{4}$.

Відповідь: $S = \dfrac{\pi Q}{4}$.

27. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — дана пряма призма, ромби $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — основи, кожне бічне ребро є висотою. $A_1D = 12$ м, $AA_1 \perp (ABC)$, A_1D — похила, AD — проекція, тому $\angle ADA_1 = 45°$ як кут між A_1D і (ABC).

У ΔAA_1D: $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$, тоді $\angle A_1 = 45°$,

$AD = AA_1 = \dfrac{A_1D}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ (см).



У дану призму вписано циліндр, тоді кола основи циліндра O і O_1 — вписані в ромби $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ відповідно.

$h = 2r$; $h = a \cdot \sin\alpha$;

$h = 6\sqrt{2} \cdot \sin 30° = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 3\sqrt{2}$ (см); $r = \dfrac{1}{2}3\sqrt{2}$.

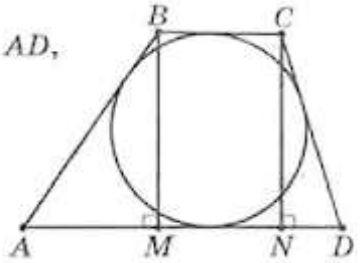
Бічне ребро призми дорівнює твірній циліндра.

Для циліндра: $S_{б.} = 2\pi RH = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2}3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 36\pi$ (см²).

Відповідь: 36π см².

alox.net

28. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — дана пряма призма, основи — трапеції $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Кожне бічне ребро призми є висотою. У дану призму вписано циліндр, кола основ циліндра вписані в трапеції, бічне ребро призми дорівнює твірній циліндра. Розглянемо трапецію $ABCD$: $AD \parallel BC$, $AD = 27$ см, $BC = 6$ см, $CD = 13$ см. Радіус циліндра дорівнює радіусу вписаного в трапецію кола — половині висоти трапеції. Проведемо висоти BM і CN, тоді ΔABM і ΔDCN — прямокутні. Позначимо AM за y, DN за x, $x + y = 27 - 6 = 21$.



Оскільки в трапецію вписане коло, то $AB + CD = BC + AD$, тоді $AB = BC + AD - CD = 20$ (см).

У ΔABM: $BM^2 = AB^2 - AM^2 = 20^2 - y^2$.

У ΔDCN: $CN^2 = DC^2 - CN^2 = 13^2 - x^2$.

Маємо: $\begin{cases} x + y = 21, \\ 20^2 - y^2 = 13^2 - x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 13^2 - 20^2, \\ x + y = 21; \end{cases}$

$\begin{cases} (x - y)(x + y) = (13 - 20)(13 - 20), \\ x + y = 21; \end{cases}$ $\begin{cases} (x - y) \cdot 21 = -7 \cdot 33, \\ x + y = 21; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = -11, \\ x + y = 21; \end{cases}$ $+ \; 2x = 10,$

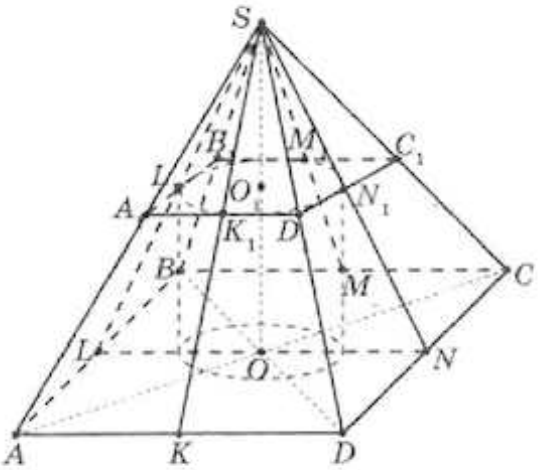
$x = 5$, $CN^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, $CN = 12$ см. $R = \frac{1}{2}CN = 6$ см.

Відповідь: 6 см.

29. За умовою даний тетраедр правильний, отже, його мимобіжні ребра перпендикулярні (приклад 4 §17), саме вони є діаметрами основ циліндра (бо знаходяться у паралельних площинах основ циліндра). Відрізком осі циліндра є середня лінія, що перпендикулярна до цих мимобіжних ребер. Оскільки ребро тетраедра a, то середня лінія $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (§17). Осьовий переріз циліндра — прямокутник зі сторонами — діаметр і висота циліндра, $S_{\text{пер.}} = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

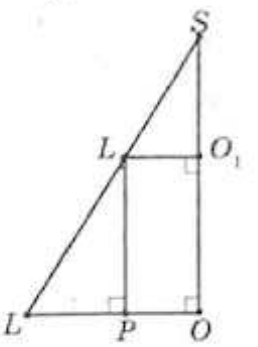
30. Нехай $SABCD$ — дана правильна чотирикутна піраміда, $ABCD$ — квадрат — основа піраміди, SO — висота, де O — точка перетину діагоналей квадрат. Усі ребра дорівнюють a. SK, SL, SM, SN — апофеми піраміди. У дану піраміду вписано циліндр, діаметр якого дорівнює висоті, нижня основа якого належить основі піраміди, O — центр кола нижньої основи, центр кола верхньої основи — O_1, $O_1 \in SO$, K_1, L_1, M_1, N_1 — спільні точки верхнього кола основи з апофемами піраміди, $(K_1L_1M_1) \parallel (KLM)$, A_1, B_1, C_1, D_1 — точки перетину $(K_1L_1M_1)$ і бічних ребер SA, SB, SC, SD відповідно.



Розглянемо ΔLOS. $LO = \frac{a}{2}$; $\angle O = 90°$;

$SL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SO^2 = SL^2 - LO^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$L_1 \in SL$, $LO_1 \parallel LO$, $LO_1 \perp SO$; $L_1P \parallel SO$;
$L_1P \perp LO$ ($P \in (ABC)$).



alldz.net

Позначимо PL за x, за властивістю рівностороннього циліндра $PO = L_1O_1 = \frac{x}{2}$;

$LP = LO - PO = \frac{a}{2} - \frac{x}{2}$.

$\Delta LPL_1 \sim \Delta LOS$ ($\angle P = \angle O = 90°$, $PL_1 \parallel SO$).

$\frac{LP}{LO} = \frac{PL_1}{SO}$; $\frac{\frac{a}{2} - \frac{x}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$; $\frac{a-x}{a} = \frac{2x}{a\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}\cdot a - \sqrt{2}\cdot x = 2x$; $2x + x\sqrt{2} = a\sqrt{2}$;

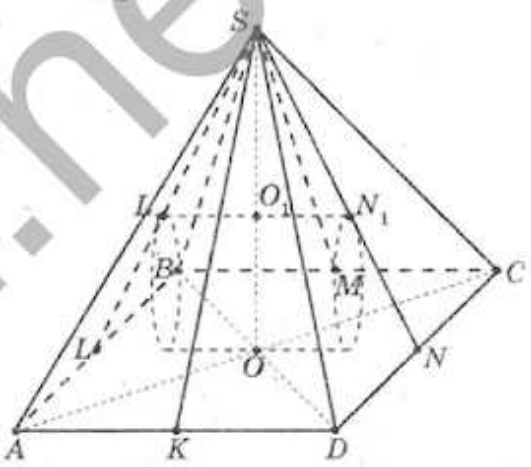
$x(2+\sqrt{2}) = a\sqrt{2}$; $x = \frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$; $x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$; $x = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$;

$x = a(\sqrt{2}-1)$.

Оскільки $PO = L_1O_1 = \frac{x}{2}$, то $R_{\text{ц.}} = \frac{x}{2} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$.

Відповідь: $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$.

31. Нехай $SABCD$ — дана правильна чотирикутна піраміда, основа — квадрат $ABCD$, SO — висота, O — точка перетину діагоналей квадрата.
Усі ребра дорівнюють a; SK, SL, SM, SN — апофеми. У дану піраміду вписано циліндр, діаметр якого дорівнює висоті, (ABC) — дотична площина, L_1 і N_1 — точка перетину кіл основ циліндра і SL та SN відповідно, $L_1N_1 \parallel LM$.
Розглянемо ΔLOS і аналогічно розв'язанню задачі 30 §18 маємо: $x = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$.



Відповідь: $x = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$.

§19. Властивості конуса

ПОЯСНЕННЯ

Формули для обчислення:
довжини твірної: $l^2 = H^2 + R^2$
площі осьового перерізу: $S_{\text{пер.}} = R \cdot H$
бічної поверхні конуса: $S_{\text{б}} = \pi Rl$
основи конуса: $S_{\text{о}} = \pi R^2$
повної поверхні конуса: $S_{\text{п}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(R + l)$
бічної поверхні зрізаного конуса: $S_{\text{б}} = \pi(R + R_1)l$
повної поверхні зрізаного конуса: $S_{\text{п.}} = \pi(R + R_1)l + \pi R^2 + \pi R_1^2$
(конус прямий круговий, l — довжина твірної, R — радіус, H — висота)

Завдання 16

1. 1) Ні (конус прямий круговий).
   2) Ні (конус прямий круговий); так (конус зрізаний, це кут при верхній основі).
2. $H = 15$ см. $R = 8$ см, $l^2 = H^2 + R^2$, $l^2 = 15^2 + 8^2$, $l^2 = 289$, $l = 17$ см.
   Відповідь: 17 см.

alaz.net

3. $R = 28$ см, $l - H = 8$ см, $l = 8 + H$; $l^2 = H^2 + R^2$; $(8 + H)^2 = H^2 + 28^2$;
$64 + 16H + H^2 = H^2 + 784$; $16H = 720$; $H = 45$ см.
$S_{пер.} = R \cdot H$, $S_{пер.} = 28 \cdot 45 = 1260$ (см^2).
Відповідь: 1260 см^2.

4. Нехай ΔABC — осьовий переріз конуса, BO — висота і медіана; $AB = BC$. BO — перпендикуляр до площини основи, AB — похила, AO — проекція, тоді $\angle BAC = \alpha$ — кут між твірною і площиною конуса; $l = 12$ см $= AB$; $AO = R$; $S_{осн.} = \pi R^2$.
У ΔAOB: $\angle O = 90°$; $AO = AB \cdot \cos\alpha = 12 \cdot \cos\alpha$; $S_{осн.} = \pi(12\cos\alpha) = \pi \cdot 144 \cdot \cos^2\alpha$.

1) $\alpha = 30°$; $S_{осн.} = 144\pi \cdot \cos^2 30° = 114\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 108\pi$ (см^2);

2) $\alpha = 45°$; $S_{осн.} = 144\pi \cdot \cos^2 45° = 114\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 72\pi$ (см^2);

3) $\alpha = 60°$; $S_{осн.} = 144\pi \cdot \cos^2 60° = 114\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 36\pi$ (см^2).



Відповідь: 108π см^2, 72π см^2, 36π см^2.

5. Нехай осьовий переріз конуса — прямокутний ΔABC, $AB = BC$, $\angle B = 90°$, $S_{ABC} = 25$ см^2. Оскільки ΔABC рівнобедрений, то $\angle A = \angle C = 45°$, $H = R$,
$S_{ABC} = H \cdot R = 25$ см^2; $R \cdot R = 25$; $R^2 = 25$, $R = 5$ (см).
Відповідь: 5 см.

6. $S_{осн.} = 8$ м^2; $S_{пер.} = 6$ м^2.

Маємо: $\begin{cases} \pi R^2 = 8, \\ R \cdot H = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} R^2 = \frac{8}{\pi}, \\ H = \frac{6}{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} R^2 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ H = \frac{6\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}; \end{cases}$ $H = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}\sqrt{2}}{2} = 1{,}5\sqrt{2\pi}$ (м).

Відповідь: $1{,}5\sqrt{2\pi}$ м.

7. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник, отже, $l = 2R$,

$H = \frac{l\sqrt{3}}{2}$; $S_{\Delta} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$; $l^2 = 25 \cdot 4$, $l = 10$ см.

1) $H = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ (см); 2) $R = \frac{1}{2}l = 5$ (см).

Відповідь: $H = 5\sqrt{3}$ см; $R = 5$ см.

8. $S_{пер.} = 0{,}6$ м^2; $H = 1{,}2$ м. $R \cdot H = 0{,}6$; $R \cdot 1{,}2 = 0{,}6$; $R = 0{,}5$ м.
$l^2 = H^2 + R^2$; $l^2 = 0{,}5^2 + 1{,}2^2 = 0{,}25 + 1{,}44 = 1{,}69$; $l = 1{,}3$ м.
$S_{б} = \pi R(R + l)$; $S_{б} = \pi \cdot 0{,}5(0{,}5 + 1{,}3) = 0{,}9\pi$ (м^2).
Відповідь: $0{,}9\pi$ м^2.

9. Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник ΔABC, $l = 16$ см $= AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. За теоремою косинусів: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120°$;

$AC^2 = 16^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot 16^2$; $AC = 16\sqrt{3}$ см.

$R = \frac{1}{2}AC$; $R = 8\sqrt{3}$ см. $H^2 = l^2 - R^2$; $H^2 - 16^2 - \left(8\sqrt{3}\right)^2 = 64$; $H = 8$ см.

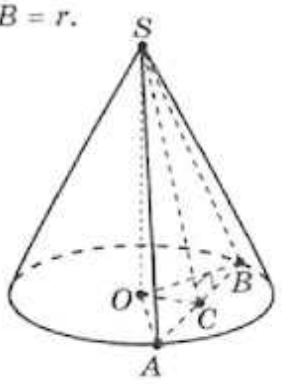
$S_{б} = \pi R(R + l)$; $S = \pi \cdot 8\sqrt{3}\left(8\sqrt{3} + 16\right) = 64\pi\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 2\right)$ (см^2).

Відповідь: $64\pi\sqrt{3}\left(2 + \sqrt{3}\right)$ см^2.

aldz.net

10. Нехай на малюнку зображено даний конус, SO — відрізок осі, S — вершина, O — центр основи. Через вершину конуса S і хорду основи AB проведемо переріз — рівнобедрений ΔASB, $AS = SB = l$; $AO = OB = r$; $\cup AB = \alpha$, тоді $\angle AOB = \alpha$.
У ΔAOB за теоремою косинусів: $AB^2 = AO^2 + AO^2 - 2AO^2 \cdot \cos\alpha$;
$AB^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\alpha = 2r^2(1 - \cos\alpha)$.

1) $\alpha = 60°$; $AB^2 = 2r^2(1 - \cos 60°) = 2r^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2r^2 \cdot \frac{1}{2} = r^2$; $AB = r$.



Проведемо висоту ΔASB: SC є висотою і медіаною.

У ΔASC: $\angle C = 90°$; $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{r}{2}$; $SC^2 = AS^2 - AC^2$;

$$SC^2 = l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = l^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{4l^2 - r^2}{4}; \quad SC = \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot SC = \frac{r}{2} \cdot \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2} = \frac{r}{4}\sqrt{4l^2 - r^2}.$$

2) $\alpha = 90°$; $AB^2 = 2r^2(1 - \cos 90°) = 2r^2(1 - 0) = 2r^2$; $AB = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Аналогічно (1): $SC^2 = l^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = l^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{2l^2 - r^2}{2}$; $SC = \sqrt{\frac{2l^2 - r^2}{2}}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot SC = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2l^2 - r^2}{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2l^2 - r^2}.$$

Відповідь: 1) $\frac{r}{4}\sqrt{4l^2 - r^2}$; 2) $\frac{r}{2}\sqrt{2l^2 - r^2}$.

11. При обертанні прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см навколо катета 6 см утворився конус радіусом 8 см, висотою 6 см і твірною 10 см (трикутник єгипетський), $R = 8$ см, $H = 6$ см, $l = 10$ см.
1) $S_б = \pi Rl = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi$ (дм^2).
2) $S_п = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(R + l) = \pi \cdot 8(8 + 10) = 144\pi$ (дм^2).
Відповідь: 1) 80π дм^2; 2) 144π дм^2.

12. Розглянемо рівнобедрений ΔABC — осьовий переріз даного конуса $AB = 6{,}5$ м $= l$; $\angle ABO = 45°$.
У ΔABO: $\angle O = 90°$; $\angle B = 45°$; $\angle A = 45°$, тому

$$AO = BO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6{,}5}{\sqrt{2}} = \frac{6{,}5\sqrt{2}}{2} = R.$$

$$S_б = \pi Rl = \pi \cdot \frac{6{,}5\sqrt{2}}{2} = 21{,}125\sqrt{2}\pi \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь: $21{,}125\sqrt{2}\pi$ м^2.

13. Математичною моделлю крівлі башти є конус, $d = 6$ м, тоді $R = 3$ м, $H = 2$ м.
Площа даху башти дорівнює площі бічної поверхні конуса;
$S_б = \pi Rl$; $l^2 = R^2 + H^2$; $l^2 = 3^2 + 2^2$; $l = \sqrt{13}$ м.
$S_б = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{13} = 3\pi\sqrt{13}$ (м^2) $= 10{,}82 \cdot 3{,}14 = 33{,}96$; $\pi = 3{,}14$.
Площа 1 листа заліза: $0{,}7 \times 1{,}4 = 0{,}98$ (м^2).
$33{,}96 \cdot 1{,}1 = 37{,}36$ (м^2) — площа, яку слід покрити залізом з урахуванням 10 % відходів.
$37{,}36 : 0{,}98 = 38{,}12$; отже, потрібно 39 листів.
Відповідь: 39 листів.

alg7.net

14. Нехай ΔABC — осьовий переріз даного конуса (див. рис. до № 4 § 19).

$AB = BC = l$, $\angle ABC = \alpha$. BO — висота, медіана і бісектриса. $\angle ABO = \frac{\alpha}{2}$.

У ΔABO: $\angle O = 90°$, $AO = AB \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$; $AO = l \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = R$. $S_{осн.} = \pi R^2 = \pi l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Відповідь: $\pi l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

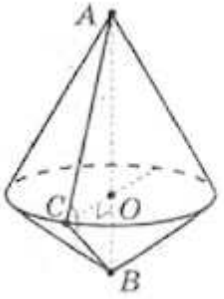
15. За розв'язанням задачі 14: $S_{осн.} = \pi R^2 = Q$; $R^2 = \frac{Q}{\pi}$; $R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.

У ΔABO: $BO^2 = AB^2 - AO^2$; $H^2 = l^2 - \frac{Q}{\pi}$; $H = \sqrt{l^2 - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi l^2 - Q}{\pi}}$.

$$S_{пер.} = R \cdot H = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi l^2 - Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{Q(\pi l^2 - Q)}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{Q(\pi l^2 - Q)}}{\pi}.$$

Відповідь: $S_{пер.} = \frac{1}{\pi}\sqrt{Q(\pi l^2 - Q)}$.

16. Тілом обертання прямокутного трикутника з катетом a і протилежним кутом 30° навколо гіпотенузи будуть два конуси зі спільною основою, катети BC і AC — твірні, гіпотенуза AB — відрізок осі тіла обертання, O — центр основи, $O \in AB$, $CO \perp AB$, CO — висота ΔABC, $CO = R$. $S_{п.} = S_{б_1} + S_{б_2} = \pi R l_1 + \pi R l_2 = \pi R(l_1 + l_2)$.
У ΔABC: $\angle C = 90°$; $BC = a$, $\angle A = 30°$, тоді



$AC = a\sqrt{3}$; $CO = CB \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{п.} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(a + a\sqrt{3}\right) = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right) = \frac{\pi a^2}{2}\left(\sqrt{3} + 3\right).$$

Відповідь: $\frac{\pi a^2}{2}\left(\sqrt{3} + 3\right)$.

* Якщо в задачі 16 кут 30° прилеглий до катета a, то

$$AC = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad CO = \frac{a}{2} = R; \quad S_{п.} = \pi \cdot \frac{a}{2}\left(a + \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi a^2}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi a^2}{6}\left(\sqrt{3} + 3\right).$$

17. Тілом обертання рівнобедреного трикутника з кутом при вершині α навколо основи, довжина якої a, будуть два однакові конуси зі спільною основою (див. рис. до № 16 § 19), бічні сторони $AC = BC$ — твірні конуса, основа AB — відрізок осі тіла обертання, O — центр основи, $O \in AB$, $CO \perp AB$, CO — висота, медіана, бісектриса ΔABC, $AO = BO = \frac{a}{2}$; $\angle ACO = \frac{\alpha}{2}$.

У ΔAOC: $\angle O = 90°$; $AC = \frac{AO}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = l$; $OC = AO \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = R$.

$$S_б = 2\pi R l = 2\pi \cdot \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \pi \frac{a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Відповідь: $\pi \frac{a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

aldz.net

18. Див. рис. і позначення до задачі № 10 §19. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник зі стороною $2r$, тоді $l = 2r$; $H^2 = l^2 - r^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$; $H = r\sqrt{3}$.
Через твірні SA і SB проведемо переріз; $SA = SB = 2r$; $\angle ASB = \alpha$.
У ΔASB проведемо висоту SC, SC — висота, медіана, бісектриса.

У ΔSAC: $\angle C = 90°$; $\angle S = \frac{\alpha}{2}$; $SA = 2r$, $AC = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$; $SC = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2AC \cdot SC = AC \cdot SC$. $S_{\Delta ABC} = 2r\sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2r\cos\frac{\alpha}{2} = 2r^2\sin\alpha$.

1) $\alpha = 30°$; $S_{\Delta ABC} = 2r^2 \cdot \sin 30° = 2r^2 \cdot \frac{1}{2} = r^2$.

2) $\alpha = 45°$; $S_{\Delta ABC} = 2r^2 \cdot \sin 45° = 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = r^2\sqrt{2}$.

3) $\alpha = 60°$; $S_{\Delta ABC} = 2r^2 \cdot \sin 60° = 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r^2\sqrt{3}$.

Відповідь: 1) r^2; 3) $r^2\sqrt{2}$; 3) $r^2\sqrt{3}$.

19. Див. рис. і позначення до задачі № 10 §19. $SO = H = 10$ см; ΔABC — рівнобедрений — переріз конуса, $\cup AB = 60°$, $\angle AOB = 60°$, тоді ΔAOB — рівносторонній, $AO = BO = AB = r$.
У ΔASB проведемо висоту SC, SC — висота, бісектриса, медіана. $SO \perp (AOB)$, SC — похила, OC — проекція, $SC \perp AB$, $CO \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри), тоді $\angle SCO = \alpha$ — кут між $(ASB) \perp (AOB)$.
У ΔSOC:

$\angle O = 90°$; $\angle C = \alpha$; $SC = \frac{SO}{\sin\alpha} = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{10}{\sin\alpha}$; $OC = SO \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 10\operatorname{ctg}\alpha$.

У ΔAOB: OC — висота, медіана;

$OC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$; $\frac{AB\sqrt{3}}{2} = 10\operatorname{ctg}\alpha$; $AB = \frac{20}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot SC$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{10}{\sin\alpha} = \frac{100\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}\sin\alpha}$.

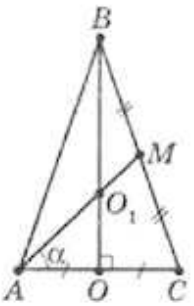
1) $\alpha = 30°$; $S_{\Delta ABC} = \frac{100\operatorname{ctg}30°}{\sqrt{3}\sin 30°} = \frac{100 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}} = 200$ (см²).

2) $\alpha = 45°$; $S_{\Delta ABC} = \frac{100\operatorname{ctg}45°}{\sqrt{3}\sin 45°} = \frac{100 \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{200}{\sqrt{6}} = \frac{200\sqrt{6}}{6} = \frac{100\sqrt{6}}{3}$ (см²).

3) $\alpha = 60°$; $S_{\Delta ABC} = \frac{100\operatorname{ctg}60°}{\sqrt{3}\sin 60°} = \frac{100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{200\sqrt{3}}{9}$ (см²).

Відповідь: 1) 200 см²; 2) $\frac{100\sqrt{6}}{3}$ см²; 3) $\frac{200\sqrt{3}}{9}$ см².

20. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник — ΔABC, $AB = BC$, B — вершина конуса, AC — діаметр, $BO = H$ — висота і медіана ΔABC — висота конуса, O — середина AC. Площина перерізу перпендикулярна до площини основи. Проведемо AM — медіану ΔABC. Проекцією прямої AM на площину основи конуса є пряма AC, тоді кут між AM і площиною конуса — це $\angle MAC = \alpha$, $\alpha < 90°$. Оскільки BO і AM — медіани, O_1 — точка їх перетину, $BO_1 : O_1O = 2 : 1$;



all2.net

$OO_1 = \frac{1}{3}BO = \frac{1}{3}H.$

У ΔAO_1O: $\angle O = 90°$; $\frac{AO}{OO_1} = \operatorname{ctg}\alpha$; $AO = OO_1 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; $AO = \frac{H}{3}\operatorname{ctg}\alpha = R.$

Відповідь: $\frac{H}{3}\operatorname{ctg}\alpha.$

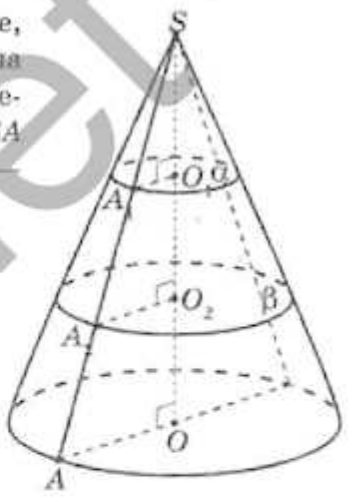
21. Оскільки твірна конуса утворює з площиною основи кут 60°, то осьовим перерізом конуса є правильний трикутник, твірна дорівнює діаметру основи, $l = 2r$, де r — радіус основи конуса. Сектор розгортки має за радіус довжину твірної, $R = l = 2r$, а довжина дуги сектора дорівнює довжині дуги кола основи конуса: $C = 2\pi r$, $C = l_{дуги}$.

За формулою $l_{дуги} = \frac{\pi R}{180°} \cdot n$ (n — градусна міра сектора) маємо:

$2\pi r = \frac{\pi \cdot 2r}{180°} \cdot n$, звідки $n = 180°$.

Відповідь: 180°.

22. Площини α і β проведені перпендикулярно до SO, отже, паралельно площині основи конуса, тоді перерізами є кола радіусів R_1 і R_2 з центрами O_1 і O_2, де O_1 і O_2 — точки перетину SO і α і β відповідно, A_1 і A_2 — точки перетину SA і α і β відповідно. Оскільки $\alpha \parallel \beta$, то $O_1A \parallel O_2A$; S_1 і S_2 — площі перерізів. $\Delta SO_1A_1 \sim \Delta SO_2A_2$ з коефіцієнтом $\frac{SO_1}{SO_2}$. $SO_1 = n$, $SO_2 = m$.



1) $\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{n}{m} = k$; тоді

$\frac{A_1O_1}{A_2O_2} = k = \frac{n}{m} = \frac{R_1}{R_2}$; $\frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{n^2}{m^2}$.

2) $OO_2 = a$, $OO_1 = b$.

23. Див. рис. і позначення до № 4 §19. $\angle BAO$ — шуканий; $S_{\Delta ABC} = S_{кв}$, квадрат побудовано на радіусі основи конуса, тоді $S_{кв.} = r^2 = S_{\Delta ABC}$.
$S_{\Delta ABC} = r \cdot H = r^2$, отже, $H = r$, тобто $BO = AO$, ΔAOB — рівнобедрений прямокутний, звідки $\angle A = 45°$, $\angle BAO = 45°$.
Відповідь: 45°.

24. Див. рис. і позначення до № 4 §19. Оскільки ΔABC можна вписати в коло основи цього конуса, то $AO = CO = BO$, отже, $AO = BO = r$, тоді $\angle BAO = 45°$ (за № 23).
Відповідь: 45°.

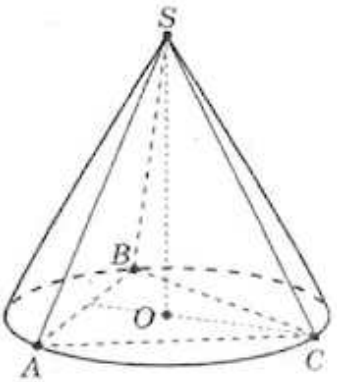
25. Усі площини, що проходять через вершину конуса і перетинають основу по хордах, утворюють у перерізах рівнобедрені трикутники, дві сторони яких — твірні, а третя сторона — хорда. Найбільшою з усіх хорд кола є діаметр, отже, найбільшу площу буде мати трикутник, що спирається на діаметр — осьовий переріз конуса. Позначимо твірну l, кут між ними α. Тоді $S_{\Delta} = \frac{1}{2}l^2 \sin\alpha$.

Якщо α змінюється від 0° до 90°, $\sin\alpha$ збільшується від 0 до 1.
Якщо α змінюється від 90° 180°, $\sin\alpha$ зменшується від 1 до 0.
Якщо $\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$, отже, найбільшу площу матиме осьовий переріз, твірні якого утворюють кут 90° — прямокутний рівнобедрений трикутник.

Відповідь: $S = \frac{l^2}{2}$.

alloz.net

26. Нехай на малюнку зображено даний конус з вершиною S, SA, SB, SC — твірні, $SA \perp SB \perp SC$, отже, $SABC$ — правильна піраміда, основа якої — правильний ΔABC, вписаний у коло основи конуса. Висота конуса SO є висотою піраміди, O — центр ΔABC; $SO = H$.



Позначимо сторону трикутника a, тоді $R = OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

У ΔASC: $\angle S = 90°$; $AC = a$, тоді $SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

У ΔSOC: $\angle O = 90°$; $SO^2 = SC^2 - CO^2$;

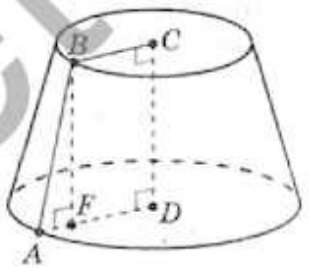
$$SO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}.$$

$$H^2 = \frac{a^2}{6};\ a^2 = 6H^2;\ a = H\sqrt{6};$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{H\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{H\sqrt{18}}{3} = \frac{3H\sqrt{2}}{3} = H\sqrt{2}.$$

Відповідь: $R = H\sqrt{2}$.

27. Нехай $ABCD$ — дана прямокутна трапеція, $AD \parallel BC$, $AD = 18$ см, $BC = 13$ см, $CD \perp AD$, $CD \perp BC$, $CD = 12$ см. Оскільки обертанням цієї трапеції навколо CD утворився зрізаний конус, то $r = 13$ см, $R = 18$ см; $H = 12$ см, C і D — центри кіл верхньої і нижньої основи. Проведемо висоту трапеції BF.



$BC = FD$; $AF = 18 - 13 = 5$ (см); $BF = CD$.

У ΔABF: $\angle F = 90°$; $AB^2 = BF^2 + AF^2$;

$AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169$; $AB = 13$ см. AB — твірна конуса.

$S_{б} = \pi(r + R)l + \pi r^2 + \pi R^2$.

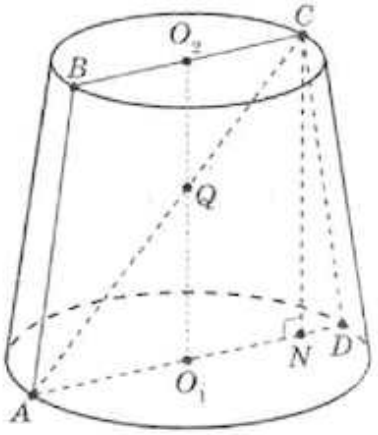
$S_{б} = \pi(13 + 18)\cdot 13 + \pi\cdot 13^2 + \pi\cdot 18^2 = 403\pi + 169\pi + 324\pi = 896\pi$ (см^2).

Відповідь: 896π см^2.

28. Осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція, кути при основах рівні, сума кутів при бічній стороні 180°, отже, суми протилежних кутів цієї трапеції 180°, значить, за властивістю: навколо такого чотирикутника завжди можна описати коло.

Висновок: навколо осьового перерізу зрізаного конуса завжди можна описати коло.

29. Нехай на малюнку зображено даний зрізаний конус, O_1 і O_2 — центри основ. Рівнобічна трапеція $ABCD$ — осьовий переріз конуса, $AD \parallel BC$, AD і BC — діаметри, AB і CD — твірні, $AB = CD = 8$ см; AB — похила до площини основи, AD — її проекція, (ABC) перпендикулярна до основи, отже, $\angle BAD = 60°$ — кут між AB і площиною основи; AC є бісектрисою $\angle BAD$, тоді $\angle CAB = 30°$; $\angle DAC = 30°$; $\angle BCA = 30°$ (як внутрішні різносторонні при $AD \parallel BC$ і січній AC). Отже, ΔABC — рівнобедрений, $AB = BC = 8$ см. У ΔACD: $\angle A = 30°$, $\angle D = \angle BAC = 60°$ (кути при основі AD), тоді $\angle C = 90°$, $AD = 2CD = 16$ см.



$$BO_2 = r = \frac{1}{2}BC = 4 \text{ см};\ AO_1 = R = \frac{1}{2}AD = 8 \text{ см};\ l = AB = 8 \text{ см}.$$

$S_{б} = \pi(4 + 8)\cdot 8 + \pi\cdot 4^2 + \pi\cdot 8^2 = 96\pi + 16\pi + 64\pi = 176\pi$ (см^2).

Відповідь: 176π см^2.

alov.net

30. Див. рис. і позначення до № 27 §19. $r = BC = 5$ см, $R = AD = 11$ см, $\angle ABF = \alpha$.
У ΔABF: $\angle F = 90°$; $AF = AD - FD = AD - BC = 11 - 5 = 6$ (см); $\angle ABF = \alpha$.

$$AB = \frac{AF}{\sin\alpha} = l = \frac{6}{\sin\alpha}.$$

1) $\alpha = 30°$; $l = \dfrac{6}{\sin 30°} = 12$ (см).

2) $\alpha = 45°$; $l = \dfrac{6}{\sin 45°} = \dfrac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 6\sqrt{2}$ (см).

3) $\alpha = 60°$; $l = \dfrac{6}{\sin 60°} = \dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ (см).

Відповідь: 1) 12 см; 2) $6\sqrt{2}$ см; 3) $4\sqrt{3}$ см.

31. Див. рис. і позначення до № 27 §19. $\angle BAD = \alpha$; $AB = BC = n$ або $AB = AD = n$.
BF — висота трапеції; $BC = r$; $AD = R$.
У ΔBAF: $\angle F = 90°$; $AF = AB \cdot \cos\alpha = n \cdot \cos\alpha$.
Якщо $BC = FD = n = r$, то $AD = AF + FD = n + n\cos\alpha = n(1 + \cos\alpha) = R$.
Якщо $AB = n = R$, то $FD = BC = AD - AF = n - n\cos\alpha = n(1 - \cos\alpha) = r$.

1) $\alpha = 30°$; $r = n$, $R = n(1 + \cos 30°) = n\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = n\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

$S_м = \pi r^2 = n^2\pi$; $S_б = \pi R^2 = \pi \cdot n^2\left(\dfrac{4 + 4\sqrt{3} + 3}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}\left(7 + 4\sqrt{3}\right)n^2$.

$R = n$; $r = n(1 - \cos\alpha) = n\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$.

$S_б = \pi R^2 = \pi n^2$; $S_м = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 n^2 = \dfrac{\pi n^2}{4}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$.

2) $\alpha = 45°$; $r = n$, $R = n(1 + \cos 45°) = n\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = n\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

$S_м = \pi r^2 = \pi n^2$; $S_б = \pi R^2 = \pi \cdot n^2\left(\dfrac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{4}\right) = \pi n^2 \dfrac{6 + 4\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\pi n^2}{2}\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

$R = n$; $r = n(1 - \cos 45°) = h\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

$S_б = \pi R^2 = \pi n^2$; $S_м = \pi r^2 = \pi \cdot h^2\left(\dfrac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4}\right) = \pi h^2 \dfrac{6 - 4\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\pi h^2}{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

3) $\alpha = 60°$; $r = n$, $R = n(1 + \cos 60°) = h\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}n$.

$S_м = \pi r^2 = \pi n^2$; $S_б = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{2}n\right)^2 = \dfrac{9n^2}{4}\pi$.

$R = n$; $r = n(1 - \cos 60°) = n\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}n$.

alldz.net

$S_б = \pi R^2 = \pi n^2$; $S_{м.} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}n\right)^2 = \frac{\pi n^2}{4}$.

Відповідь: 1) $S_1 = \pi n^2$; $S_2 = \frac{\pi n^2}{4}\left(7 \pm 4\sqrt{3}\right)$; 2) $S_1 = \pi n^2$; $S_2 = \frac{\pi n^2}{4}\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$;

3) $S_1 = \pi n^2$; $S_2 = \frac{9\pi n^2}{4}$ або $\frac{\pi n^2}{4}$.

32. Див. рис. і позначення до № 29 §19 (окрім діагоналі AC): $AO_1 = R = 25$ см, $BO_2 = r = 16$ см. Осьовим перерізом є рівнобічна трапеція; за умовою в трапецію можна вписати коло, тоді $AD + BC = AB + CD = 2AB$;

$AB = \frac{(25+16)\cdot 2}{2} = 41$ (см), діаметром кола є висота трапеції.

Проведемо висоту BF, $AF = AO_1 - BO_1 = 25 - 16 = 9$ (см).

У ΔABF: $\angle F = 90°$; $BF^2 = AB^2 - AF^2 = 41^2 - 9^2 = (41 - 9)(41 + 9) = 32 \cdot 50$.

$BF = \sqrt{16 \cdot 25 \cdot 4} = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ (см).

Тоді радіус кола, вписаного в переріз: $40 : 2 = 20$ (см).

Відповідь: 20 см.

33. Див. рис. і позначення до № 27 §19. $BC = r$; $AD = R$; $r : R = 1 : 3$; $\angle BAD = 45°$; $BF = h$.

Оскільки $r : R = 1 : 3$, позначимо $r = x$, $R = 3x$, $x > 0$;

$AF = AD - DF = 3x - x = 2x$.

У ΔABF: $\angle F = 90°$; $\angle A = 45°$, тоді $\angle B = 45°$, отже, ΔABF — рівнобедрений,

$AF = FB = h$; $2x = h$, $x = \frac{h}{2}$; $r = \frac{h}{2}$; $R = \frac{3h}{2}$; $AB = AF \cdot \sqrt{2}$; $AB = h\sqrt{2} = l$.

$S_{п.} = \pi(r + Rl) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi\left(\frac{h}{2} + \frac{3h}{2}\right) \cdot h\sqrt{2} + \pi\left(\frac{3h}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$.

$S_{п.} = \pi \cdot 2h^2 \cdot \sqrt{2} + \pi\frac{9h^2}{4} + \pi\frac{h^2}{4} = 2\pi h^2\sqrt{2} + \frac{10\pi h^2}{4} = \pi h^2\left(2\sqrt{2} + 2{,}5\right)$.

Відповідь: $\pi h^2\left(2\sqrt{2} + 2{,}5\right)$.

34. Див. рис. і позначення до № 29 §19. $l = AB = CD = 26$ см, Q — точка перетину діагоналі AC і висоти O_1O_2.

$AQ = 26{,}25$ см; $CQ = 13{,}75$ см, отже, $AC = 40$ см; $O_2C = r$, $AO_1 = R$.

$\Delta AQO_1 \sim \Delta CQO_2$ ($O_2A \parallel O_1C$, $\angle AQO_1 = \angle CQO_2$ — вертикальні), тому

$\frac{AO_1}{CO_2} = \frac{QO_1}{QO_2}$; $\frac{R}{r} = \frac{26{,}25}{13{,}75} = \frac{21}{11}$; $R = \frac{21}{11}r$.

Проведемо $CN \perp AD$, CN — висота трапеції;

$ND = \frac{AD - BC}{2}$; $ND = \frac{2R - 2r}{2} = R - r$.

У ΔCND: $\angle N = 90°$; $\cos\angle D = \frac{ND}{CD} = \frac{R-r}{26}$.

У ΔACD: за теоремою косинусів: $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos\angle D$;

$AC^2 = 40^2 = 26^2 + (2R)^2 - 2 \cdot 26 \cdot (2R) \cdot \frac{R-r}{26}$; $1600 = 676 + 4R^2 - 4R^2 + 4Rr$;

$924 = 4Rr$; $Rr = 231$; $\frac{21}{11}r \cdot r = 231$; $r^2 = 231 \cdot \frac{11}{21}$; $r^2 = 121$; $r = 11$ см;

$R = \frac{21}{11} \cdot 11 = 21$ (см).

Відповідь: $r = 11$ см, $R = 21$ см.

ndz.net

35. Див. рис. і позначення до № 27 §19.

$BC = r$, $AD = R$; $BF = h$; $AB = l$; $AF = AD - BC = R - r$.

За умовою: $l = R + r$; $h = R - r$. У ΔABF: $\angle F = 90°$; $AF = BF = R - r$;

$AB = R + r$, тоді це рівнобедрений прямокутний трикутник, $AB = AF\sqrt{2}$;

$R + r = (R - r) \cdot \sqrt{2}$; $R + r = R\sqrt{2} - r\sqrt{2}$; $r + r\sqrt{2} = R\sqrt{2} - R$;

$$r\left(1 + \sqrt{2}\right) = R\left(\sqrt{2} - 1\right);\ \frac{R}{r} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1}.$$

Відповідь: $\frac{R}{r} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1}$.

36. Середини відрізків з кінцями на колах протилежних основ зрізаного конуса рівновіддалені від площин основ конуса, отже, всі вони належать площині, паралельній основам зрізаного конуса, причому множина точок цієї площини обмежена серединами всіх твірних зрізаного конуса, отже, дане ГМТ — круг із центром на середині відрізка осі, паралельний основам конуса.

37. Нехай на малюнку зображено даний конус, SO — відрізок осі, S — вершина, O — центр основи; $R = 10$ дм; $L = SA = 16$ дм.

Площина, паралельна основі, поділяє даний конус на менший з радіусом основи r і твірною l і зрізаний конус, O_1 і A_1 — точки перетину площини і SO і SA відповідно. За умовою $S_{б.м.} = S_{б.зр.}$, тобто:

$S_{п.м.} = \pi r(r + l)$; $S_{п.зр.} = \pi(r + R) \cdot (L - l) + \pi R^2 + \pi r^2$.

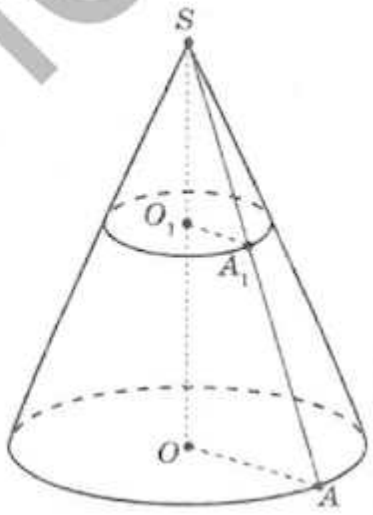
$\pi r(r + l) = \pi(10 + r)(16 - l) + 100\pi + \pi r^2 \mid : \pi$;

$r^2 + rl = 160 + 16r - 10l - rl + 100 + r^2$;

$2rl - 16r = 260 - 10l \mid : 2$; $rl - 8r = 130 - 5l$;

$r(l - 8) = 130 - 5l$.

$\Delta SOA \sim \Delta SO_1A_1$ ($\angle S$ — спільний, $OA \parallel O_1A_1$), тоді $\frac{SO}{SO_1} = \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{SA}{SA_1}$;



$$\frac{10}{r} = \frac{16}{l};\ l = \frac{16r}{10} = \frac{8r}{5}.$$

Маємо: $r \cdot (1{,}6r - 8) = 130 - 5 \cdot \frac{8r}{5}$;

$1{,}6r^2 - 8r = 130 - 8r$; $r^2 = \frac{130}{1{,}6}$; $r^2 = \frac{1300}{16}$;

$$r = \frac{10\sqrt{13}}{4} = \frac{5\sqrt{13}}{2}.$$

$$\frac{SO}{SO_1} = \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{10}{\frac{5\sqrt{13}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Позначимо $SO = 4x$, $SO_1 = \sqrt{13}x$, $x > 0$, тоді $OO_1 = SO - OO_1$.

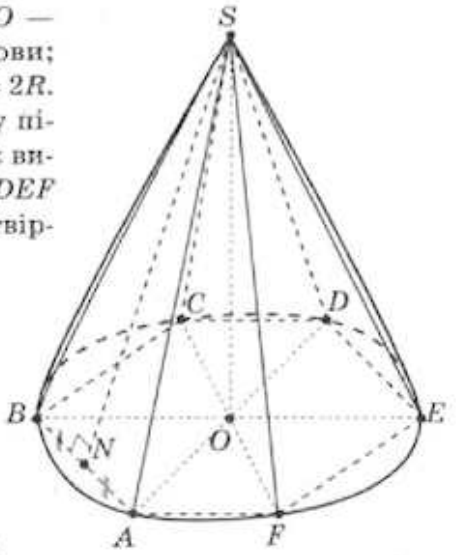
$OO_1 = 4x - \sqrt{13}x = \left(4 - \sqrt{13}\right) \cdot x$;

$$\frac{SO}{OO_1} = \frac{\sqrt{13}x}{\left(4 - \sqrt{13}\right)x} = \frac{\sqrt{13}}{4 - \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}\left(4 + \sqrt{13}\right)}{3}.$$

Відповідь: $\frac{SO}{OO_1} = \frac{\sqrt{13}\left(4 + \sqrt{13}\right)}{3}$.

alaz.net

38. Нехай на малюнку зображено даний конус, SO — відрізок осі, S — вершина, O — центр основи; $SA = l$ — твірна. Конус рівносторонній, отже, $l = 2R$. У даний конус вписано правильну шестикутну піраміду, тоді вершиною піраміди є точка S, SO є висотою піраміди, правильний шестикутник $ABCDEF$ вписаний у коло основи конуса, бічне ребро є твірною конуса.



Проведемо апофему грані ASB:
SN — висота і медіана, N — середина AB.
У ΔSNA: $\angle N = 90°$; $SN^2 = SA^2 - AN^2$; $SA = l$;

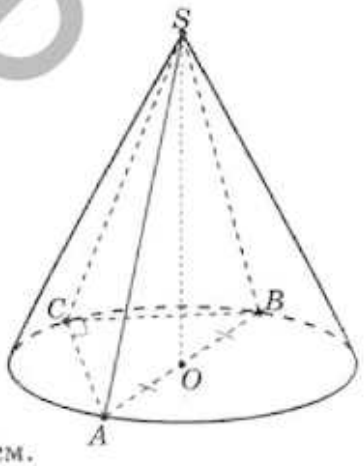
$AN = \frac{r}{2}$ (у правильному шестикутнику сторона дорівнює радіусу описаного кола).

$$SN^2 = l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = (2r)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 4r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{15r^2}{4};$$

$$SN = \frac{r}{2}\sqrt{15}. \quad S_{б.} = 6 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SN = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{15} = \frac{3r^2}{2}\sqrt{15}.$$

Відповідь: $\frac{3r^2}{2}\sqrt{15}$.

39. Нехай на малюнку зображено даний конус, SO — відрізок осі, S — вершина, O — центр основи, $l = 5$ см. У даний конус вписано піраміду $SABC$, ΔABC — рівнобедрений прямокутний — вписаний у коло основи конуса, AB — гіпотенуза, центр O — середина AB; $AC = BC = 3\sqrt{2}$ см, тоді

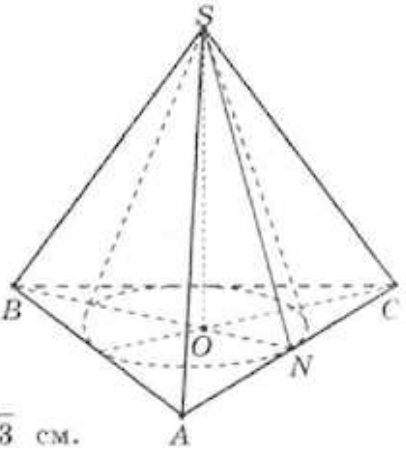


$AB = AC\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$ (см),

$R = \frac{1}{2} AB = 3$ см.

Бічне ребро піраміди є твірною конуса, $SA = l = 5$ см, висота конуса — SO є висотою піраміди.
У ΔSAO: $\angle O = 90°$; $SA = 5$ см, $AO = 3$ см, тоді $SO = 4$ см.
Відповідь: 4 см.

40. Нехай на малюнку зображено даний конус, SO — відрізок осі, S — вершина, O — центр основи, $r = 6$ см, $SO = 8$ см. Навколо конуса описано правильну трикутну піраміду $SABC$, ΔABC — правильний, описаний навколо кола основи конуса, O — центр трикутника, SO є висотою піраміди, а всі грані конуса є дотичними до поверхні конуса.



Позначимо сторону трикутника a. Проведемо апофему бічної грані SAC: SN — висота і медіана ΔASC, N — середина AC, ON — радіус кола, вписаного в трикутник, — радіус конуса.

$ON = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\frac{a\sqrt{3}}{6} = 6$; $a = 12\sqrt{3}$ (см); $AC = 12\sqrt{3}$ см.

$SN^2 = SO^2 + ON^2$; $SN^2 = 8^2 + 6^2 = 100$; $SN = 10$ (см).

$S_{б.} = 3 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot SN = \frac{3}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 10 = 180\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $180\sqrt{3}$ см^2.

alds.net

41. Нехай на малюнку зображено правильний тетраедр $SABC$ (усі ребра і грані рівні). У даний тетраедр вписано конус, висота конуса збігається з висотою тетраедра SO, де центр основи — точка O — центр ΔABC; бічні грані тетраедра є дотичними до поверхні конуса, апофема бічної грані SN — твірна конуса; ON — радіус вписаного кола (див. рис. до № 40 §19).

Позначимо сторону тетраедра a. Тоді в ΔASC: $SN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; в ΔABC:

$ON = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; в ΔSON: $\angle O = 90°$;

$$SO^2 = SN^2 - SO^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{9a^2 - a^2}{12} = \frac{8a^2}{12};\quad SO = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$SO = H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $NO = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

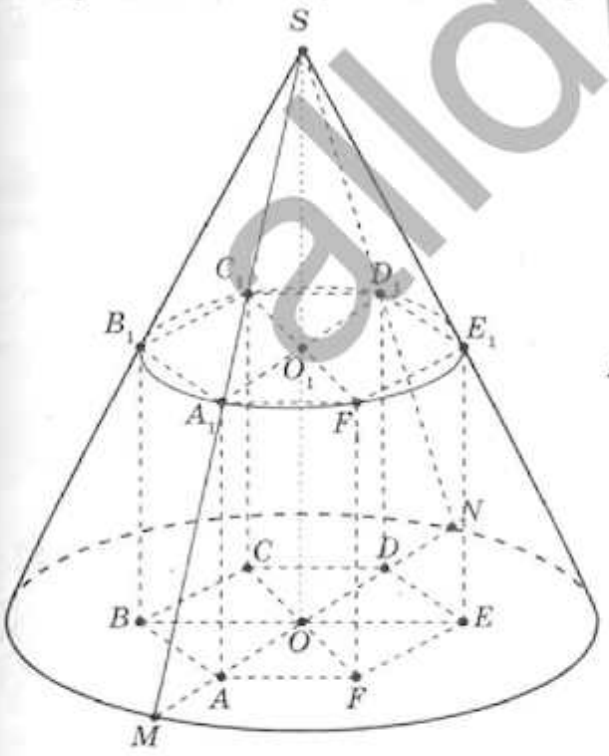
За умовою $S_{бк.} = 625\sqrt{3}$ см² (для конуса), $S_{бк.} = H \cdot r$; $Hr = 625\sqrt{3}$;

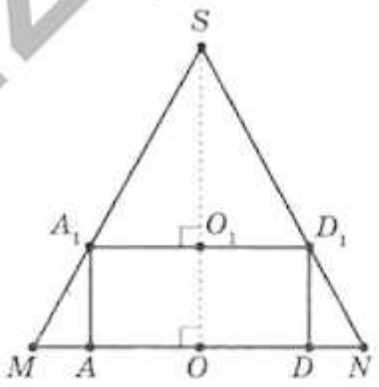
$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = 625\sqrt{3};\quad a^2 = \frac{25^2\sqrt{3}\cdot 6}{\sqrt{2}} = \frac{25^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot 6}{2} = 25^2\cdot 3\cdot\sqrt{6} = 25^2\sqrt{54};$$

$a = 25\sqrt[4]{54}$ (см).

Відповідь: $25\sqrt[4]{54}$ см.

42. Нехай на малюнку зображено даний рівносторонній конус ($l = 2r$), SO — відрізок осі, S — вершина, O — центр основи, твірна l. У даний конус вписано правильну шестикутну призму, тоді центри основ призми належать SO, нижня основа — правильний шестикутник $ABCDEF$ — належать площині основи конуса, верхня основа $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ є вписаною в коло перерізу конуса площиною, паралельною основі. Позначимо сторону шестикутника a, за умовою AA_1F_1F — квадрат, отже, $h = a$ (кожне бічне ребро є висотою).





Розглянемо осьовий переріз даної комбінації тіл. ΔSMN — правильний — осьовий переріз конуса,

$MN = l$, $MO = \frac{l}{2}$; $SO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

AA_1D_1D — прямокутник — діагональний переріз призми.

$AA_1 = DD_1 = a$, $AD = A_1D_1 = 2a$; O і O_1 — середини AD і A_1D_1 відповідно, тому $AO = A_1O = a = OO_1$.

$AD \parallel A_1D_1$, тому $\Delta MSO \sim \Delta A_1SO_1$, тоді $\frac{MO}{A_1O_1} = \frac{SO}{SO_1}$; $SO_1 = SO - OO_1$.

aldz.net

$$\frac{\frac{l}{2}}{a}=\frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l\frac{\sqrt{3}}{2}-a};\quad \frac{1}{a}=\frac{\sqrt{3}}{l\frac{\sqrt{3}}{2}-a};\quad a\sqrt{3}=l\frac{\sqrt{3}}{2}-a;\quad a\left(\sqrt{3}+1\right)=l\frac{\sqrt{3}}{2};$$

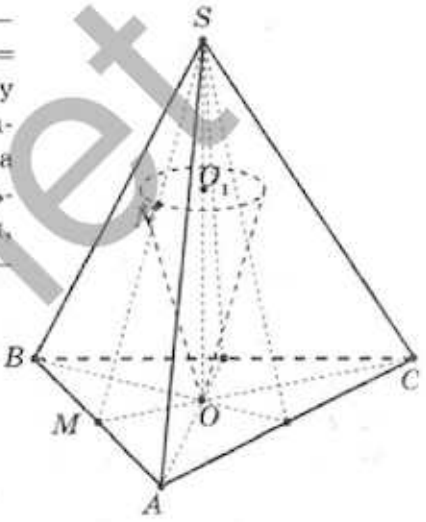
$$a=\frac{l\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{l\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{l\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\frac{l\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

$$S_{AA_1D_1D}=AA_1\cdot AD=a\cdot 2a=2a^2=2\cdot\left(\frac{l\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\right)^2=2\cdot\frac{l^2\cdot\left(3-2\sqrt{3}+1\right)}{16}=$$

$$=\frac{l^2\cdot 3\left(4-2\sqrt{3}\right)}{8}=\frac{l^2\cdot 3\cdot 2\left(2-\sqrt{3}\right)}{8}=\frac{3l^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

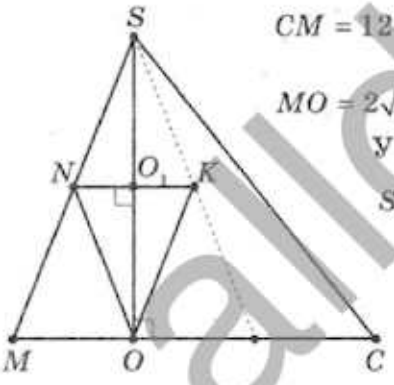
Відповідь: $\frac{3l^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}$.

43. Нехай $SABC$ — правильна трикутна піраміда, SO — висота, O — центр правильного ΔABC, $AB=BC=AC=12$ см, $SA=SB=SC=13$ см. У дану піраміду вписано рівносторонній конус ($l=2r$), висота піраміди SO містить висоту конуса OO_1, O — вершина конуса, O_1 — центр основи — кола, яке дотикається до всіх бічних граней. SM — апофема піраміди, N — точка перетину SM і кола основи конуса, N — точка дотику основи конуса до (SAB).



Розглянемо осьовий переріз даної комбінації.

CM — медіана і висота ΔABC,



$$CM=12\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\ \text{(см)},$$

$MO=2\sqrt{3}$ см, $OC=4\sqrt{3}$ см.

У ΔSOC: $\angle O=90^\circ$; $SO^2=SC^2-CO^2$;

$SO^2=13^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2=121$; $SO=11$ см.

ΔNOK — рівносторонній, осьовий переріз конуса. Позначимо твірну конуса l, тоді $ON=l$.

$$NO_1=\frac{l}{2};\quad OO_1=l\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Оскільки площина основи конуса перпендикулярна до SO, то ця площина паралельна площині (ABC), отже, $MO\parallel NO_1$, тоді $\Delta MOS\sim\Delta NO_1S$:

$$\frac{MO}{NO_1}=\frac{SO}{SO_1};\quad SO_1=SO-OO_1=11-l\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \frac{2\sqrt{3}}{\frac{l}{2}}=\frac{11}{11-l\frac{\sqrt{3}}{2}};$$

$$2\sqrt{3}\left(11-l\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=11\cdot\frac{l}{2};\quad 22\sqrt{3}-3l=\frac{11l}{2};\quad 22\sqrt{3}=\frac{11l}{2}+\frac{6l}{2};\quad 22\sqrt{3}=\frac{17l}{2};$$

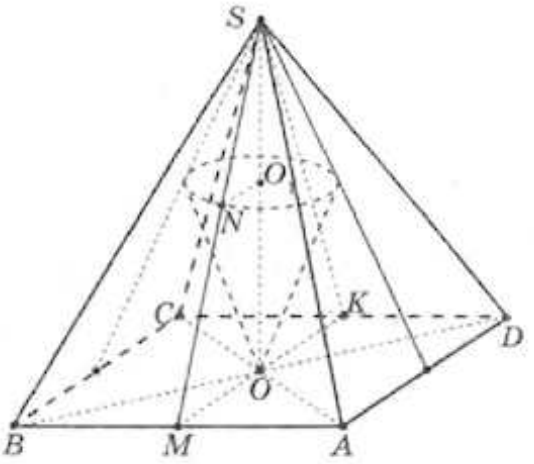
$$l=\frac{44\sqrt{3}}{17}.$$

$$OO_1=l\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{44\sqrt{3}}{17}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{22\cdot 3}{17}=\frac{66}{17}=3\frac{15}{17}\ \text{(см)}.$$

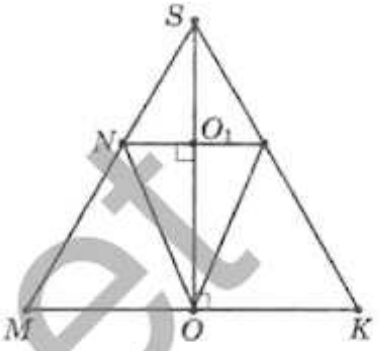
Відповідь: $3\frac{15}{17}$ см.

alg7.net

44. Нехай $SABCD$ — дана піраміда, S — вершина. За умовою $a = SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = AD$, отже, ця піраміда є правильною, основа — квадрат $ABCD$, SO — висота, O — точка перетину діагоналей квадрата. У дану піраміду вписано рівносторонній конус ($l = 2r$), висота піраміди містить висоту конуса OO_1, $O_1 \in SO$, O_1 — центр кола основи конуса, яке дотикається до всіх бічних граней піраміди. SM — апофема піраміди, N — точка перетину SM і кола основи циліндра; N — точка дотику основи конуса до (SAB).



Розглянемо осьовий переріз даної комбінації тіл.



ΔMSK — рівнобедрений; $SM = SK$ — апофеми піраміди, NO_1 — радіус основи конуса.

O — середина MK; оскільки площина основи конуса перпендикулярна до SO, то ця площина паралельна до (ABC), отже, $MO \parallel NO_1$, $\Delta MOS \sim \Delta NO_1S$, $\dfrac{MO}{NO_1} = \dfrac{SO}{SO_1}$.

У ΔABS: SM — медіана і висота;

$SB = SA = BA = a$; $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MK = a$, $MO = \dfrac{a}{2}$.

У ΔSOM: $\angle O = 90°$;

$$SO^2 = SM^2 - MO^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2};\quad SO = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Оскільки конус рівносторонній, то $ON = l$,

$NO_1 = \dfrac{l}{2}$, тоді $OO_1 = l\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $SO_1 = SO - OO_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - l\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Маємо: $\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{l}{2}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} - l\frac{\sqrt{3}}{2}}$; $\dfrac{a}{l} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} - l\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{l} = \dfrac{\sqrt{2}}{a\sqrt{2} - l\sqrt{3}}$;

$l\sqrt{2} = a\sqrt{2} - l\sqrt{3}$; $l\sqrt{2} + l\sqrt{3} = a\sqrt{2}$; $l\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = a\sqrt{2}$;

$$l = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)} = \frac{a\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{1}.$$

$$OO_1 = l\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \frac{a\sqrt{18}}{2} - \frac{a\sqrt{12}}{2} = 1{,}5a\sqrt{2} - a\sqrt{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ або $1{,}5a\sqrt{2} - a\sqrt{3}$.

45. Нехай на малюнку зображено даний конус, SO — відрізок осі, S — вершина, O — центр основи. У даний конус вписано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні, кожне бічне ребро є висотою, кожне ребро призми дорівнює a.

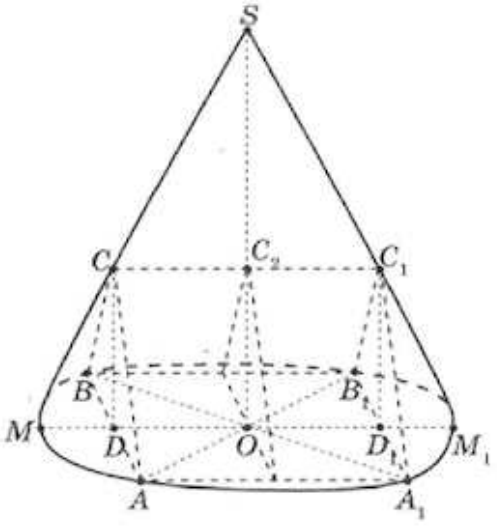
Грань ABB_1A_1 — квадрат, вписаний в основу конуса, O — точка перетину діагоналей, $AB_1 = BA_1 = a\sqrt{2}$. $AO = R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

alex.net

Точки C і C_1 належать бічній поверхні конуса, $CC_1 = a$; $CC_1 \parallel AA_1 \parallel BB_1$; CD — медіана і висота ΔABC, $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C_1D_1 — медіана і висота $\Delta A_1B_1C_1$, проекцією відрізка CC_1 на площину (ABB_1) є відрізок DD_1, C_2 — середина CC_1 проектується в середину DD_1 — точку O; $C_2 \in SO$.

Розглянемо осьовий переріз даної комбінації тіл, що проходить через CC_1 і DD_1; SM і SM_1 — твірні конуса, де M і M_1 — точки перетину прямої DD_1 з колом основи конуса.

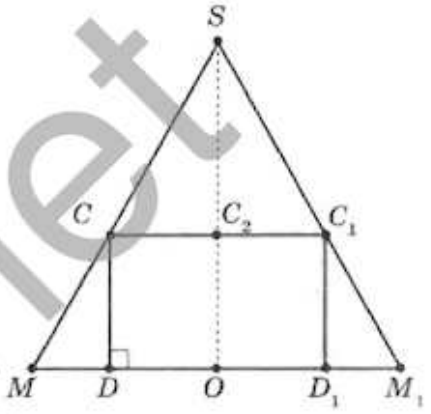


$$MO = R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad DO = CC_2 = \frac{a}{2};$$

$$CD = C_2O = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Позначимо SC_2 за x.

Оскільки $MO \parallel CC_2$, то $\Delta MOS \sim \Delta CC_2S$, звідси:



$$\frac{MO}{CC_2} = \frac{SO}{SC_2}; \quad \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{x + \frac{a\sqrt{3}}{2}}{x}; \quad \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{x + \frac{a\sqrt{3}}{2}}{x};$$

$$x\sqrt{2} = x + \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad x\sqrt{2} - x = a\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2 \cdot 1} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right);$$

$$SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right) + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} + \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2} + 2\right).$$

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2} + 2\right)$.

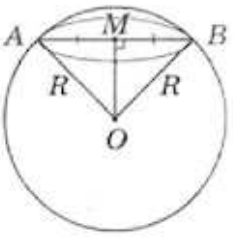
§ 20. Властивості сфери і кулі

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ — рівняння сфери;
$(a; b; c)$ — центр сфери; R — радіус.

Завдання 17

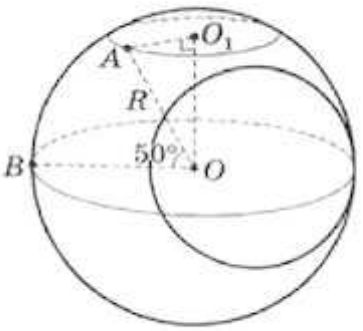
1. Дві точки сфери, що симетричні відносно її центра, віддалені одна від одної на відстань $2R$. Отже, $D = 2R = 2 \cdot 6400 = 12\,800$ км.
Відповідь: 12 800 км.

2. Нехай коло з центром M є полярним колом $R_з = OB = 6400$ км. $OM = 5900$ км.
За теоремою Піфагора
$MB^2 = OB^2 - MO^2 = 40\,960\,000 - 34\,810\,000 =$
$= 6\,150\,000 = 2480^2$. $C = 2\pi R = 15\,326$.
Відповідь: = 15 000 км.



alg.net

3. Місто Харків знаходиться на 50 паралелі, це означає, що $\angle BOA = 50°$. Тому $\angle AOO_1 = 40°$.



ΔAO_1O: $\angle AO_1O = 90°$; $\angle AOO_1 = 40°$; $AO = R_з = 6400$ км.
AO_1 — радіус кола, по якому рухається м. Харків за рахунок обертання Землі.

$$\sin 40° = \frac{AO_1}{AO};$$

$AO_1 = R \cdot \sin 40° \approx 6400 \cdot 0{,}64 = 4114$ км.
$C = 2\pi \cdot AO_1$; $C = 2\pi \cdot 4114 \approx 25\,835$ км.
Відповідь: ≈25 835 км.

4. Найбільшим колом земної кулі є екватор.
Відповідь: екватор.

5. Див. рис. до № 2. Розглянемо ΔAOB, він — рівнобедрений ($AO = OB = R$).
1) У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є його висотою. Отже, з того, що $AM = MB$, випливає $OM \perp AB$.
2) У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, співпадає з його медіаною. Отже, з того, що $OM \perp AB$, випливає, що $AM = MB$.

6. Див. рис. до № 2. Спираючись на завдання 5, маємо $OM \perp AB$.
1) За теоремою Піфагора: $OM^2 = OB^2 - MB^2 = R^2 - MB^2$;
$MB = AB : 2 = 18 : 2 = 9$ (см). $OM^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$; $OM = 12$ см.
2) $MB^2 = OB^2 - OM^2 = R^2 - OM^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$; $MB = 8$ дм;
$AB = 2 \cdot MB = 2 \cdot 8 = 16$ дм.
3) $AM^2 = AO^2 - OM^2 = R^2 - OM^2 = a^2 - b^2$; $AM = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Відповідь: 1) 12 см; 2) 16 дм; 3) $\sqrt{a^2 - b^2}$.

7. Див. рис. до № 2. $AB = m$; $OB = R$. $OM \perp AB$, тому $AM = MB$.

За теоремою Піфагора $OM^2 = OB^2 - MB^2 = R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{m^2}{4} = \frac{4R^2 - m^2}{4}$;

$$OM = \sqrt{\frac{4R^2 - m^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}$.

8. $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ — рівняння сфери, де $(a; b; c)$ — центр, R — радіус сфери.
1) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 25$;
2) $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 = 5^2$; $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$;
3) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 25$.
Відповідь: 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; 2) $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$;
3) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 25$.

9. 1) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 6)^2 = 3^2$ — рівняння даної сфери.
Підставимо координати точки в рівняння сфери:
$(1 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 + (3 - 6)^2 = 9$; $9 = 9$.
Оскільки рівняння виконується, то точка $(1; -2; 3)$ належить сфері.
2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$ — рівняння сфери; $(1 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 + 3^2 \neq 4$.
Точка $(1; -2; 3)$ не належить сфері.
Відповідь: 1) так; 2) ні.

10. Оскільки сфера дотикається до координатних площин, то відстань від її центра до площин дорівнює $R = 1$; $O(1; 1; -1)$ — центр сфери,
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1$ — рівняння сфери.
Відповідь: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1$.

aldz.net

11. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ — рівняння сфери з центром у точці $O(a;\ b;\ c)$ і радіусом R.

1) $x^2+y^2+z^2=16$; $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=4^2$; $O(0;\ 0;\ 0)$ — центр; $R=4$.

2) $x^2+y^2+z^2=5$; $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$; $O(0;\ 0;\ 0)$ — центр; $R=\sqrt{5}$.

3) $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$; $O(5;\ 1;\ -1)$ — центр; $R=3$.

4) $x^2+2x+y^2+z^2=8$; $(x^2+2x+1)-1+y^2+z^2=8$; $(x+1)^2+y^2+z^2=9$; $O(-1;\ 0;\ 0)$ — центр; $R=3$.

5) $x^2-2x+y^2+5y+z^2-z=0$;
$(x^2-2x+1)-1+(y^2+5y+6{,}25)-6{,}25+(z^2-z+0{,}25)-0{,}25=0$;
$(x-1)^2+(y+2{,}5)^2+(z-0{,}5)^2=7{,}5$;

$O(1;\ -2{,}5;\ 0{,}5)$ — центр; $R=\sqrt{7{,}5}$.

Відповідь: 1) $O(0;\ 0;\ 0)$, $R=4$; 2) $O(0;\ 0;\ 0)$, $R=\sqrt{5}$; 3) $O(5;\ 1;\ -1)$, $R=3$; 4) $O(-1;\ 0;\ 0)$, $R=3$; 5) $O(1;\ -2{,}5;\ 0{,}5)$, $R=\sqrt{7{,}5}$.

12. $x^2+y^2+z^2=16$; $O(0;\ 0;\ 0)$; $R=4$.

Оскільки центр гомотетії співпадає з центром сфери, то центр нової сфери теж буде знаходитись у початку координат.

1) $k=0{,}5$; $R_1=4\cdot 0{,}5=2$. $x^2+y^2+z^2=4$;

2) $k=2$; $R_1=2\cdot 4=8$. $x^2+y^2+z^2=64$;

3) $k=-1$; $R_1=|-1\cdot 4|=4$. $x^2+y^2+z^2=16$.

Відповідь: 1) $x^2+y^2+z^2=4$; 2) $x^2+y^2+z^2=64$; 3) $x^2+y^2+z^2=16$.

13. Оскільки точки $A(1;\ 0;\ z)$ і $B(-1;\ y;\ 0)$ належать сфері $x^2+y^2+z^2=10$, то їх координати задовольняють рівняння сфери, тобто

$$\begin{cases}1^2+0^2+z^2=10,\\(-1)^2+y^2+0^2=10;\end{cases}\quad\begin{cases}z^2=9,\\y^2=9;\end{cases}\quad\begin{cases}z=\pm 3,\\y=\pm 3.\end{cases}$$

$$AB=\sqrt{(1+1)^2+(0\mp 3)^2+(\pm 3-0)^2}=\sqrt{2^2+3^2+3^2}=\sqrt{4+9+9}=\sqrt{22}.$$

Відповідь: $\sqrt{22}$.

14. 1) Розв'яжемо систему: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\z=0.\end{cases}$ Маємо: $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=0.\end{cases}$

$O(0;\ 0;\ 0)$ — центр, $R=2$.

2) Розв'яжемо систему: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\y=1.\end{cases}$ Маємо: $\begin{cases}x^2+z^2=3,\\y=1.\end{cases}$

$O(0;\ 1;\ 0)$ — центр, $R=\sqrt{3}$.

3) Розв'яжемо систему: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\x=1.\end{cases}$ Маємо: $\begin{cases}x^2+z^2=3,\\x=1.\end{cases}$

$O(1;\ 0;\ 0)$ — центр, $R=\sqrt{3}$.

15. 1) Якщо сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$ дотикається до координатних площин, то $|a|=|b|=|c|=1$ і координати точок дотику від'ємні, то $(-1;\ -1;\ -1)$ — центр сфери.

2) Якщо площина проходить через точку $(-1;\ -1;\ -1{,}5)$ паралельно площині xOy, то її рівняння має вигляд $z=-1{,}5$.

Відстань від центра сфери з радіусом $R=1$ дорівнює 0,5. Тому r кола перетину дорівнює $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{1-0{,}5^2}=\sqrt{0{,}75}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $S_{\text{сер}}=\pi r^2=\pi\cdot\dfrac{3}{4}$.

Відповідь: $\dfrac{3\pi}{4}$.

alldz.net

16. $OA = R = 41$ дм; $OO_1 = d = 9$ дм; $OO_1 \perp AO_1$.

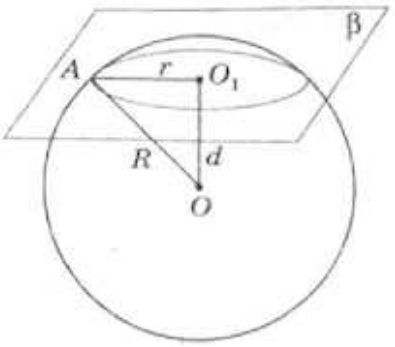
За теоремою Піфагора:

$r^2 = R^2 - d^2$;

$r^2 = 41^2 - 9^2 = 1600$; $r = 40$ дм.

$S_{кр.} = \pi r^2$; $S_{пер.} = 1600\pi$ дм^2.

Відповідь: 1600π дм^2.



17. Див. рис. до № 16. $OA = R = 2\sqrt{2}$ м; $AO_1 = r$; $\alpha = \angle OAO_1 = 45°$; $OO_1 \perp AO_1$.

$AO_1 = AO \cos\alpha$; $r = R\cos\alpha$; $r = 2\sqrt{2}\cos 45° = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ м.

$C = 2\pi r$; $C_{пер.} = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi$ м.

Відповідь: 4π м.

18. Див. рис. до № 16. $OA = R$; $AO_1 = r$; $\alpha = \angle OAO_1$; $OO_1 \perp AO_1$.

$r = R\cos\alpha$; $C = 2\pi r$; $C_{пер.} = 2\pi R\cos\alpha$.

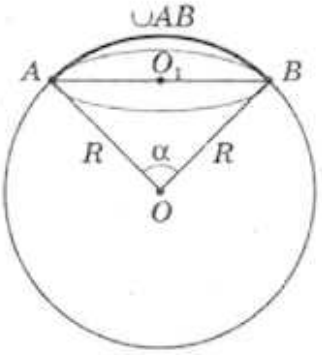
1) $R = 5$ см; $\alpha = 45°$; $C_{пер.} = 2\pi \cdot 5\cos 45° = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\pi$ см.

2) $R = 2$ см, $\alpha = 30°$; $C_{пер.} = 2\pi \cdot 2\cos 30° = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\pi$ см.

3) $R = 4$ см, $\alpha = 60°$; $C_{пер.} = 2\pi \cdot 4\cos 60° = 8\pi \cdot \frac{1}{2} = 4\pi$ см.

Відповідь: 1) $5\sqrt{2}\pi$ см; 2) $2\sqrt{3}\pi$ см; 3) 4π см.

19. $OA = OB = R$; $\angle AOB = \alpha$; $\cup AB = \frac{\pi R\alpha}{180°}$; $R = 12$ см.



1) Якщо $AB = R$, то ΔAOB — рівносторонній і $\alpha = 60°$;

$\cup AB = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 60°}{180°} = 4\pi$ см.

2) Якщо $AB = 2R$, то $\alpha = 180°$;

$\cup AB = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 180°}{180°} = 12\pi$ см.

3) Якщо $AB = \frac{R}{2}$, то $AO_1 = \frac{R}{4}$.

З ΔAO_1O: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{4 \cdot R} = \frac{1}{4}$; $\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{1}{4}$; $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{4}$.

$\cup AB = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 2\arcsin\frac{1}{4}}{180°} = \frac{2}{15}\pi\arcsin\frac{1}{4}$ см.

4) Якщо $AB = a$, то $AO_1 = \frac{a}{2}$.

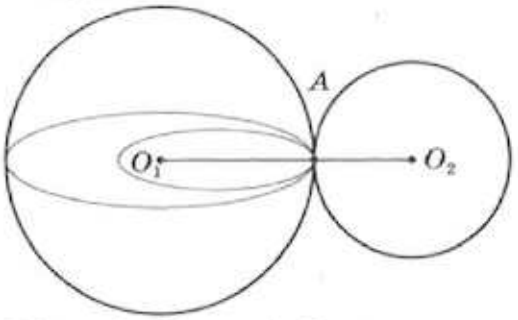
З ΔAO_1O: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2 \cdot R}$; $\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{a}{2R}$; $\alpha = 2\arcsin\frac{a}{2R}$.

$\cup AB = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 2\arcsin\frac{a}{24}}{180°} = \frac{2}{15}\pi\arcsin\frac{a}{24}$ см.

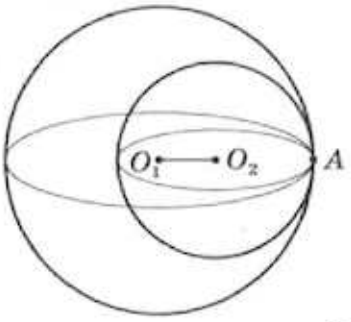
Відповідь: 1) 4π см; 2) 12π см; 3) $\frac{2}{15}\pi\arcsin\frac{1}{4}$ см; 4) $\frac{2}{15}\pi\arcsin\frac{a}{24}$ см.

alldz.net

20. а) Якщо сфери мають зовнішній дотик, то $O_1O_2 = R_1 + R_2 = 12$ дм $+ 10$ дм $= 22$ дм.

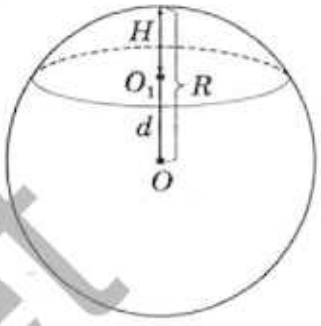


б) Якщо сфери мають внутрішній дотик, то $O_1O_2 = R_1 - R_2 = 12$ дм $- 10$ дм $= 2$ дм.



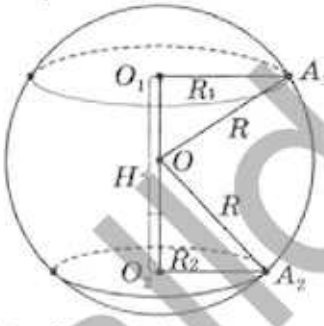
Відповідь: 22 дм або 2 дм.

21. $R = 15$ см; $d + H = R$; $H = R - d$.
1) $d = 3$ см; $H = 15 - 3 = 12$ см;
2) $d = 5$ см; $H = 15 - 5 = 10$ см;
3) $d = a$ см; $H = (15 - a)$ см.
Відповідь: 1) 12 см; 2) 10 см; 3) $(15 - a)$ см.

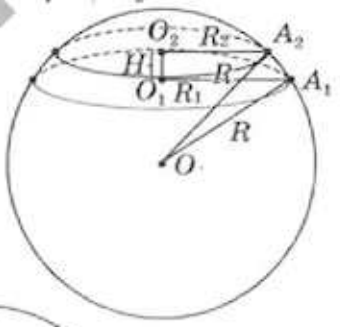


22. $S_1 = 9\pi$ м^2; $S_2 = 16\pi$ м^2; $S = \pi R^2$, отже, $R_1 = 3$ м; $R_2 = 4$ м.
$OO_1^2 = R^2 - R_1^2 = 5^2 - 3^2 = 16$; $OO_1 = 4$ м.
$OO_2^2 = R^2 - R_2^2 = 5^2 - 4^2 = 9$; $OO_2 = 3$ м.

1) Якщо основи кульового поясу розташовані по різні боки від центра кулі, то $H = OO_1 + OO_2 = 4 + 3 = 7$ м.

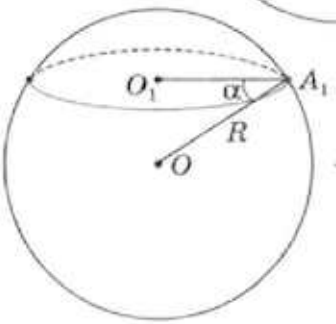


2) Якщо основи кульового поясу розташовані по один бік від центра кулі, то $H = OO_1 - OO_2 = 4 - 3 = 1$.

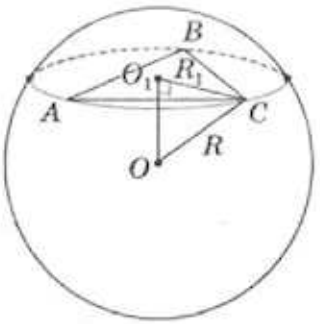


Відповідь: 7 м або 1 м.

23. $OA = R$; $\angle O_1AO = \alpha$; $\angle OO_1A = 90°$.
$r = O_1A = R\cos\alpha$; $S_{\text{пер.}} = \pi r^2$.
$S_{\text{пер.}} = \pi R^2\cos^2\alpha$.
Відповідь: $\pi R^2\cos^2\alpha$.



24. $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см. $R = 13$ см.
Через A, B і C проведемо площину, яка перетинає сферу по колу, радіус якого дорівнює радіусу кола, описаного навколо ΔABC. Якщо його центр позначити O, то OO_1 — шукана відстань. $OO_1 \perp (ABC)$.
Не важко помітити, що довжини сторін трикутника задовольняють теорему Піфагора. $6^2 + 8^2 = 10^2$. Отже, ΔABC — прямокутний ($\angle B = 90°$) і радіус описаного кола дорівнює половині гіпотенузи, тобто $R_1 = AC : 2 = 10 : 2 = 5$ см.

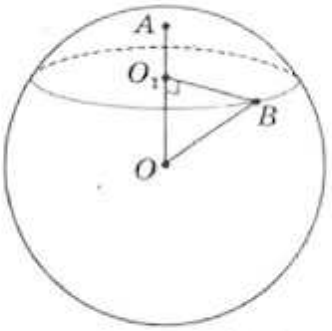


gdz.net

З ΔOO_1C: $OO_1^2 = OC^2 - O_1C^2 = R^2 - R_1^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; $OO_1 = 12$ см.
Відповідь: 12 см.

25. Кола двох великих кругів перетинаються в двох точках — кінцях діаметра. Отже, при перетині діляться навпіл.

26. $OA = OB = R$; $OO_1 = \dfrac{R}{2}$; $\angle OO_1B = 90°$; $O_1B = R_1$.



За теоремою Піфагора: $O_1B^2 = OB^2 - OO_1^2$;

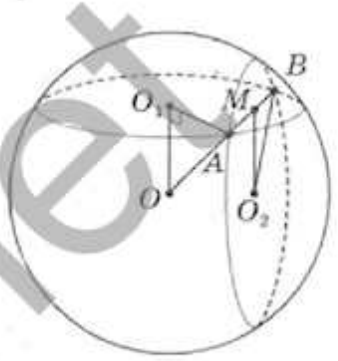
$$R_1^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}.$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{R_1^2}{R^2} = \frac{3R^2}{4} : R^2 = \frac{3}{4}.$$

Відповідь: 3 : 4.

27. $OA = OB = 18$ см. Перерізи з центрами O_1 і O_2 взаємно перпендикулярні і AB — їх спільна хорда. $AB = 2$ м.

Нехай $O_1A = O_1B = 2R$, а $O_2A = O_2B = 3R$. Проведемо $O_2M \perp AB$, тоді $AM = MB = 1$ м. За теоремою Піфагора: $O_2M^2 = O_2B^2 - MB^2 = 9R^2 - 1$; $O_2M = OO_1$.



Розглянемо прямокутний трикутник OO_1A, тоді

$OO_1^2 + O_1A^2 = OA^2$; $9R^2 - 1 + 4R^2 = 18^2$; $13R^2 = 325$;

$R^2 = \dfrac{325}{13} = 25$; $S_{\text{пер.}} = \pi r^2$; $S^1_{\text{пер}} = 4\pi R^2$; $S^2_{\text{пер}} = 9\pi R^2$.

$S^1_{\text{пер}} = 100\pi$ м^2; $S^2_{\text{пер}} = 225\pi$ м^2.

Відповідь: 100π м^2 і 225π м^2.

28. Див. рис. до № 27. Перерізи з центрами O_1 і O_2 взаємно перпендикулярні і AB — їх спільна хорда. $AB = 16$ см. Їх площі відповідно дорівнюють $S_1 = 185\pi$ см^2 і $S_2 = 320\pi$ см^2. Проведемо $O_2M \perp AB$, тоді $AM = MB = 8$ см. $S_{\text{пер.}} = \pi r^2$, тому $r_1^2 = 185$ см^2; $r_2^2 = 320$ см^2.

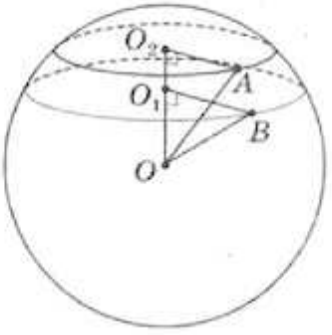
З ΔO_2MB за теоремою Піфагора маємо:

$MO_2^2 = BO_2^2 - MB^2 = 320 - 64 = 256$, а $MO_2 = OO_1$.

Тепер розглянемо ΔOO_1A; $OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2 = 256 + 185 = 441$; $OA = 21$ см.

Відповідь: 21 см.

29. Позначимо радіус кулі за R, тоді $OO_1 = \dfrac{R}{3}$, $OO_2 = \dfrac{2R}{3}$.



З ΔOO_1B ($\angle OO_1B = 90°$):

$$O_1B^2 = OB^2 - OO_1^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8R^2}{9}.$$

З ΔOO_2A ($\angle OO_2A = 90°$):

$$O_2A^2 = OA^2 - OO_2^2 = R^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{5R^2}{9}.$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{O_1B^2}{O_2A^2} = \frac{8R^2}{9} : \frac{5R^2}{9} = \frac{8}{5}.$$

Відповідь: 8 : 5.

30. Ці площини поділяють сферу на $2n^2$ рівних частин. Отже:

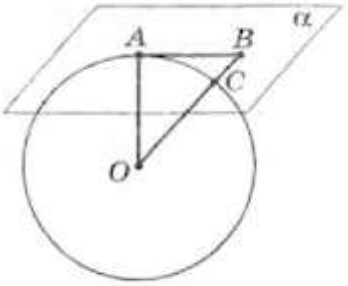
1) $n = 4$; $2 \cdot 4^2 = 32$ частин: 2) $n = 6$; $2 \cdot 6^2 = 72$ частин;

3) $n = 5$; $2 \cdot 5^2 = 50$ частин; 4) $n = 8$; $2 \cdot 8^2 = 128$ частин.

Відповідь: 1) 32; 2) 72; 3) 50; 4) 128.

alloz.net

31. Нехай α — площина, дотична до сфери, A — точка дотику, а B — точка, яка належить площині α, $\angle OAB = 90°$. $OA = 112$ м, $AB = 15$ м.



З'єднаємо центр сфери з B, C — точка перетину BO і сфери, BC — шукана відстань.

З ΔOAB: $BO^2 = AB^2 + AO^2$;

$BO^2 = 112^2 + 15^2 = 12\,769 = 113^2$;

$BO = 113$ м; $BC = BO - OC = 113 - 112 = 1$ м.

Відповідь: 1 м.

32. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ — сфера с центром $O(0; 0; 0)$, $R = \sqrt{6}$.

Знайдемо відстань від центра сфери до площини $x + y + z - 6 = 0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Оскільки $d > R$; $2\sqrt{3} > \sqrt{6}$, то площина не має зі сферою спільних точок.

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ — сфера з центром $O(0; 0; 0)$, $R = 4$.

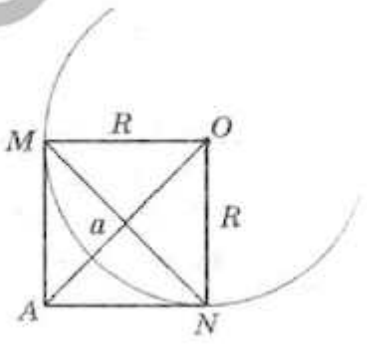
Знайдемо відстань від центра сфери до площини $2x - 2y + z - 12 = 0$.

$$d = \frac{12}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 4.$$

Оскільки $d = R$, то сфера має з площиною одну спільну точку.

Відповідь: 1) не мають спільних точок; 2) дотикаються.

33. 1) Нехай сфера с центром O і радіусом R дотикається до граней прямого кута. У перерізі маємо квадрат.

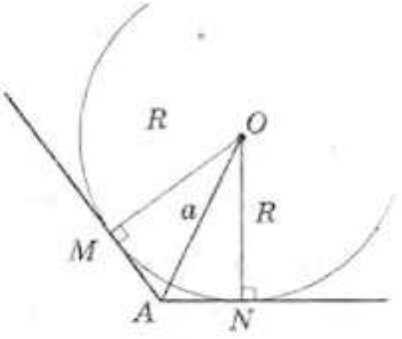


O — центр сфери; $OM = ON = R$, M і N — точки дотику. OA — відстань від центра до ребра двогранного кута.

З ΔAMO ($\angle M = 90°$) маємо:

$R^2 + R^2 = a^2$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $MN = OA = a$.

2) Нехай сфера с центром O і радіусом R дотикається до граней кута в 120°. O — центр сфери, $OM = ON = R$, M і N — точки дотику. OA — відстань від центра сфери до ребра двогранного кута. AO — бісектриса $\angle MAN$:

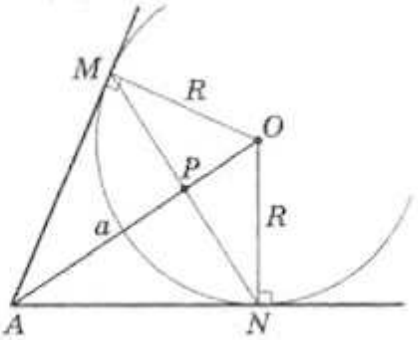


$\angle OAN = 60°$. З ΔONA ($\angle N = 90°$):

$R = a \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\angle AON = 30°$, $\angle MON = 60°$, отже, ΔMON — рівносторонній, тому $MN = R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3) Нехай сфера з центром O і радіусом R дотикається до граней кута 60°.



O — центр сфери, $OM = ON = R$, M і N — точки дотику. OA — відстань від центра сфери до ребра кута. AO — бісектриса $\angle MAN$:

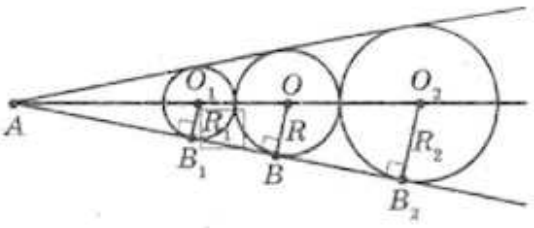
$\angle OAN = 30°$. $ON = R$ — катет, що лежить навпроти кута 30°, тому $R = \frac{a}{2}$.

alqz.net

$\angle AON = 60°$. З ΔOPN маємо: $PN = R\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. $MN = 2PN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; a; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

34. Нехай α — двогранний кут, до граней якого дотикається сфера радіуса R. А сфери радіусів R_1 і R_2 дотикаються до даної сфери і до граней цього кута.
Центри цих сфер O, O_1 і O_2 лежать на бісекторній площині до двогранного кута.
B, B_1 і B_2 — точки дотику.
$\Delta ABO \sim \Delta AB_1O_1$ (за спільним гострим кутом).



ΔABO: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{AO}$; $AO = \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

ΔAB_1O_1: $AO_1 = \frac{R_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$AO = AO_1 + R_1 + R$, тому

$$\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R_1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + R_1 + R;\quad R_1 = R\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right) : \left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 1\right);\quad R_1 = R\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогічно, змінюючи R на R_2, а R_1 на R, маємо: $R_2 = R\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Відповідь: $R\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$; $R\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

35. 1) Якщо сфера дотикається до координатних площин, то її центр $O(\pm R; \pm R; \pm R)$, а радіус R. Оскільки ця сфера дотикається до площини $2x - 2y + z - 12 = 0$, то $d(0; \alpha) = R$. Розглянемо всі можливі випадки:

1) $O(R; R; R)$, тоді $\frac{|2R - 2R + R - 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = R$;

$R = 3$; $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 9$ — рівняння сфери.

2) $O(-R; -R; -R)$, тоді $\frac{|-2R + 2R - R - 12|}{3} = R$;

$R = 6$; $(x+6)^2 + (y+6)^2 + (z+6)^2 = 36$ — рівняння сфери.

3) $O(R; R; -R)$, тоді $\frac{|2R - 2R - R - 12|}{3} = R$;

$R = 6$; $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 36$ — рівняння сфери.

4) $O(R; -R; R)$, тоді $\frac{|2R + 2R + R - 12|}{3} = R$; $R = 6$ або $R = 1{,}5$;

$(x-6)^2 + (y+6)^2 + (z-6)^2 = 36$ або $(x-1{,}5)^2 + (y+1{,}5)^2 + (z-1{,}5)^2 = 2{,}25$.

5) $O(-R; R; R)$, тоді $|2R - 2R + R - 12| = 3R$, розв'язків немає.

6) $O(-R; -R; R)$, тоді $|-2R + 2R + R - 12| = 3R$; $R = 3$;

$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.

7) $O(-R; R; -R)$, тоді $|-2R - 2R - R - 12| = 3R$, розв'язків немає.

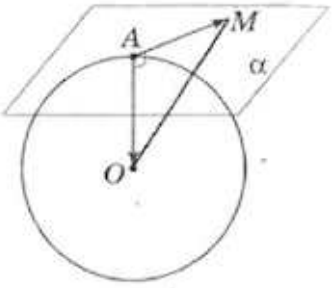
8) $O(R; -R; -R)$, тоді $|2R + 2R - R - 12| = 3R$; $R = 2$;

$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 4$.

alez.net

2) Оскільки сфера радіуса 3 дотикається до xOz та yOz, вона має рівняння $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-c)^2 = 9$. Враховуючи, що вона проходить через точку $M(2; 5; 3)$, координати цієї точки повинні задовольняти рівняння сфери.
Отже, $(2-3)^2 + (5-3)^2 + (3-c)^2 = 9$; $(3-c)^2 = 4$; $3-c = \pm 2$; $c = 1$ або $c = 5$.
Відповідь: $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$ або $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9$.

36. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ — сфера $\left((0; 0; 0); \sqrt{14}\right)$.
Виберемо довільну точку $M(x; y; z)$, яка належить дотичній площині α.



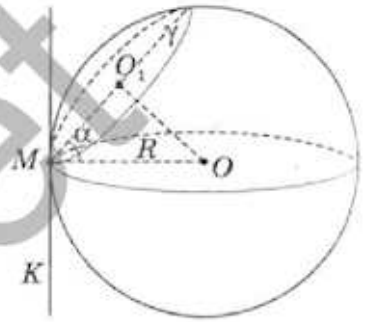
$\overrightarrow{AM} \in \alpha$, $\overrightarrow{AM}(x+1; y-2; z+3)$;

$\overrightarrow{AO} \perp \alpha$, $\overrightarrow{AO}(1; -2; 3)$.

Оскільки $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AO}$, то $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$.

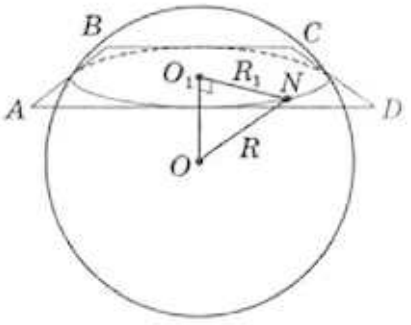
Маємо: $(x+1) \cdot 1 - 2(y-2) + 3(z+3) = 0$;
$x - 2y + 3z + 14 = 0$.
Відповідь: $x - 2y + 3z + 14 = 0$.

37. Нехай дана куля $(0; R)$, γ — січна площина, r — радіус перерізу.



1) Проведемо $OO_1 \perp \gamma$, O_1 — центр кола перерізу.
2) M — спільна точка перерізу і дотичної площини. Проведемо $k \perp OM$.
3) $OO_1 \perp \gamma$, $OM \perp k$, $O_1M = \text{пр}_\gamma OM$, тоді за ТТП $O_1M \perp k$.
4) $OM \perp k$, $O_1M \perp k$, $\angle O_1MO = \alpha$.
5) $OO_1 \perp \gamma$. Тоді $OO_1 \perp O_1M$.
6) З ΔMO_1O: $r = R\cos\alpha$.
7) $S_{\text{пер.}} = \pi r^2 = \pi R^2 \cos^2\alpha$.
Відповідь: $\pi R^2 \cos^2\alpha$.

38. Нехай куля з центром O і радіусом $R = 37$ см дотикається до всіх сторін трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB = CD$).



Маємо коло з центром O_1 сфери, вписане в трапецію $ABCD$.

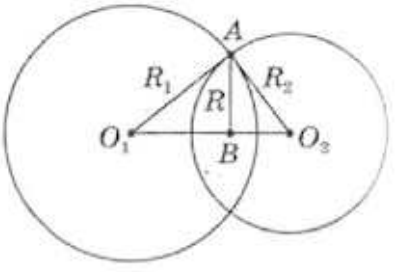
$R_1 = \dfrac{\sqrt{BC \cdot AD}}{2} = 12$ см. З ΔOO_1N ($\angle O_1 = 90°$)

$OO_1^2 = ON^2 - O_1N^2 = R^2 - R_1^2 = 37^2 - 12^2 = 1225$;
$OO_1 = 35$ см.
Відповідь: 35 см.

39. Нехай сфери $(O_1; 4)$ і $(O_2; 2)$ перетинаються. $O_1O_2 = 3$ см. Радіус кола їх перетину (R) дорівнює висоті ΔO_1AO_2, яка проведена до O_1O_2.
За формулою Герона

$$S_{O_1AO_2} = \sqrt{4{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}5} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

$$R = \frac{2S_{O_1AO_2}}{O_1O_2} = \frac{3\sqrt{15}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ см.}$$



Відповідь: $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ см.

40. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ — сфера $((0; 0; 0); 10)$.
$x^2 + y^2 + z^2 - 38x - 16y - 8z + 152 = 0$;
$(x^2 - 38x + 19^2) - 19^2 + (y^2 - 16y + 64) - 64 + (z^2 - 8z + 16) - 16 + 152 = 0$;

aldz.net

$(x - 19)^2 + (y - 8)^2 + (z - 4)^2 = 289$ — сфера $((19; 8; 4); 17)$.

OO_1 — відстань між центрами сфер. $OO_1 = \sqrt{19^2 + 8^2 + 4^2} = 21$.

$R_1 + R_2 > OO_1$ — отже, сфери перетинаються.

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ — сфера $((0; 0; 0); 2)$.

$x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 12y + 16z + 168 = 0$;

$(x^2 - 24x + 144) - 144 + (y^2 - 12y + 36) - 36 + (z^2 + 16z + 64) - 64 + 168 = 0$;

$(x - 12)^2 + (y - 6)^2 + (z + 8)^2 = 76 = \left(2\sqrt{19}\right)^2$ — сфера $\left((12; 6; -8); 2\sqrt{19}\right)$.

OO_1 — відстань між центрами сфер.

$OO_1 = \sqrt{12^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$. $2 + 2\sqrt{19} < 2\sqrt{61}$.

$R_1 + R_2 > OO_1$ — отже, сфери не перетинаються.

Відповідь: 1) перетинаються; 2) не перетинаються.

41. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — сфера $((0; 0; 0); R)$.

Для того, щоб площина була паралельна $2x - 3y + z + 1 = 0$ і перетинала сферу по великому колу, треба вільний член замінити на R, тобто шукана площина буде $2x - 3y + z + 1 - R = 0$.

Відповідь: $2x - 3y + z + 1 - R = 0$.

42. Див. рис. до № 39.

Нехай кулі $(O_1; 30)$ і $(O_2; 25)$ перетинаються. Довжина кола, по якому вони перетинаються, 48π см, тому $R = 24$ см.

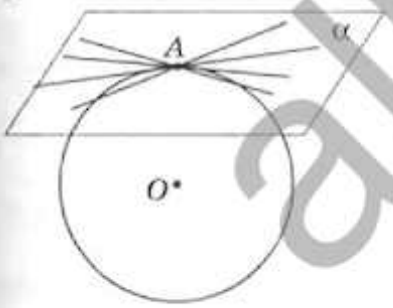
З ΔO_1BA $(\angle B = 90°)$ $O_1B = \sqrt{R_1^2 - R^2} = 7$ см.

З ΔO_2BA $(\angle B = 90°)$ $O_2B = \sqrt{R_2^2 - R^2} = 18$ см.

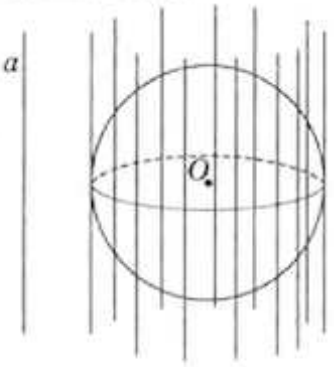
$O_1O_2 = O_1B + O_2B = 25$ см або $O_1O_2 = O_2B - O_1B = 11$ см.

Відповідь: 25 см або 11 см.

43. 1) Усі ці прямі проходять через задану точку, перпендикулярно радіусу, проведеному в точку дотику. Тобто, це буде площина, дотична до сфери в заданій точці.

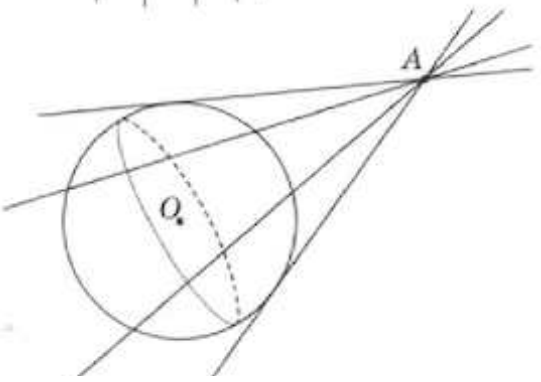


2) Усі ці прямі паралельні одна одній і знаходяться на однаковій відстані від центра сфери. Тобто це буде циліндрична поверхня, всередині якої знаходиться дана сфера і має з поверхнею спільне велике коло.



3) Це буде конічна поверхня, яка всередині містить дану сферу і має з нею спільне велике коло.

Відповідь: 1) площина; 2) циліндрична поверхня; 3) конічна поверхня.

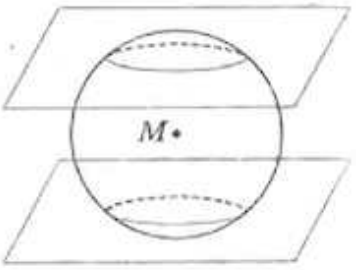


all7.net

31*

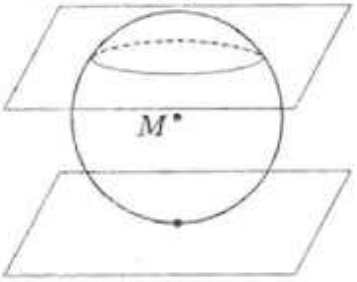
44. ГМТ, віддалених на a від даної точки M, є сфера $(M; a)$.

ГМТ, віддалених на b від даної площини, є дві площини, які паралельні даній і знаходяться на відстані b від неї по різні боки. Можливі такі випадки:

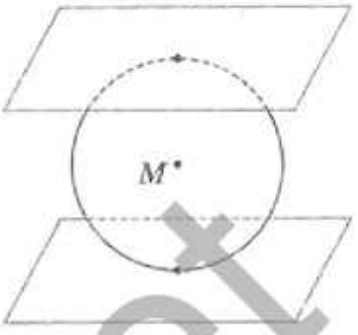


а) Два кола, якщо $a > b$ і M знаходиться між площинами.

б) Коло і точка поза ним, якщо одна з площин перетинає, а друга дотикається до сфери.



в) Дві точки, коли сфера знаходиться між площинами і кожна з них дотикається до сфери.



г) Одна точка, якщо сфера дотикається тільки до однієї площини.

д) Немає точок, коли жодна площина не дотикається до сфери.

45. 1) ГМТ є точки, рівновіддалені від центра сфери на відстань $R + r$ у випадку зовнішнього дотику і на відстань $|R - r|$ у випадку внутрішнього дотику, тому шуканим ГМТ є дві сфери.

2) Якщо $Q = \pi R^2$, тоді ГМТ є одна точка — центр сфери. Якщо $Q < \pi R^2$, то $Q = \pi r^2$, $r^2 = \dfrac{Q}{\pi}$ і відстань від центра кулі до цих точок буде однакова і дорівнюватиме $\sqrt{R^2 - \dfrac{Q}{\pi}}$, тобто це сфера, радіус якої дорівнює $\sqrt{R^2 - \dfrac{Q}{\pi}}$, а центр збігається з центром даної кулі.

3) Шуканим ГМТ буде сфера, яка внутрішнім чином дотикається до даної, а її радіус буде вдвічі менший за R.

4) Середини паралельних хорд кожного кола знаходяться на його діаметрі, отже, ГМТ буде велике коло, крім його контура, тобто кола, яке його обмежує.

5) Якщо хорда дорівнює діаметру сфери, то ГМТ буде одна точка — центр сфери.

Якщо хорда менша від діаметра, це будуть точки, рівновіддалені від центра сфери на $\sqrt{R^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ — тобто сфера $\left(O; \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}\right)$.

§21. Вписана та описана сфери

ПОЯСНЕННЯ

Теорема 1. Для того, щоб у призму можна було вписати сферу, необхідно і достатньо, щоб у перпендикулярний переріз призми можна було вписати коло і щоб висота призми дорівнювала діаметру цього кола. Вказаний діаметр і є діаметром вписаної сфери.

Центром кулі, описаної навколо многогранника, є точка, рівновіддалена від усіх його вершин, а *кулі, вписаної в многогранник*, — точка, рівновіддалена від усіх його граней.

alldz.net

Центром кулі, описаної навколо піраміди, є точка перетину перпендикуляра до основи, який проведено з центра описаного навколо основи кола, і площини, що проходить через середину будь-якого ребра, перпендикулярного до нього. *Центром вписаної у піраміду кулі* є точка перетину бісекторних площин двогранних кутів при основі.

Завдання 18

1. Якщо в прямокутний паралелепіпед можна вписати кулю, то це — куб із довжиною ребра $2R$. $S_{\text{бічн}} = 4a^2 = 4(2R)^2 = 16R^2 = 16$ м².
   Відповідь: 16 м².

2. Нехай маємо куб із довжиною ребра a, тоді його діагональ $d^2 = 3a^2$;
   $a = \frac{d}{\sqrt{3}} = 5$ дм.
   R — радіус вписаної сфери. $R = \frac{a}{2} = 2{,}5$ дм.
   Відповідь: 2,5 дм.

3. Якщо розглянути переріз призми, паралельний до його основ, матимемо коло, радіус якого дорівнює радіусу сфери, вписаної в правильний шестикутник зі стороною 12 м. Маємо: $r = \frac{a_6\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ м.
   Відповідь: $6\sqrt{3}$ м.

4. Нехай сторона основи призми дорівнює a, тоді радіус вписаної сфери $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
   Оскільки в призму вписали сферу, то висота цієї призми $H = 2r = a\sqrt{3}$.
   $S_{\text{бічн}} = 6aH = 6a^2\sqrt{3} = Q$, звідки
   $a = \sqrt{\frac{Q}{6\sqrt{3}}}$. $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{Q}{6\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3Q}{24\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{Q\sqrt{3}}{24}}$.
   Відповідь: $\sqrt{\frac{Q\sqrt{3}}{24}}$.

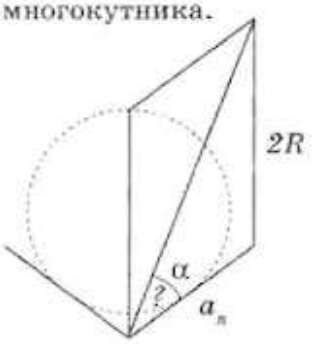
5. $S_{\text{повн.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$. Знайдемо сторону основи призми як сторону правильного трикутника, в який вписано коло радіуса R. $a = 2R\sqrt{3}$.
   Тому $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12R^2\sqrt{3}}{4} = 3R^2\sqrt{3}$.
   Якщо сферу вписано в призму, то висота призми дорівнює діаметру кола $H = 2R$.
   $S_{\text{бічн}} = 3aH = 3 \cdot 2R\sqrt{3} \cdot 2R = 12R^2\sqrt{3}$; $S_{\text{повн}} = 12R^2\sqrt{3} + 2 \cdot 3R^2\sqrt{3} = 18R^2\sqrt{3}$.
   Відповідь: $18R^2\sqrt{3}$.

6. $S_{\text{пер}} = S_{\text{осн}} = pR = \frac{PR}{2}$, P — периметр основи.
   $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot a = S$; $P_{\text{осн}} = \frac{S}{a}$. Отже, $S_{\text{пер}} = \frac{SR}{2a}$.
   Відповідь: $\frac{SR}{2a}$.

aldz.net

7. Якщо в пряму чотирикутну призму вписано сферу радіуса R, то в її основу можна вписати коло радіуса R. Нехай сторони основи дорівнюють a, b, c, d, тоді виконується рівність $a + c = b + d$. А суми площ протилежних бічних граней $2aR + 2cR$ і $2bR + 2dR$. Отже, $2R(a + c) = 2R(b + d)$.

8. Якщо в призму можна вписати сферу, то $H_{пр.} = 2R_{оф.}$ і $R_{оф} = R$ кола, вписаного в її основу. $R = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$, де a_n — сторона правильного многокутника.

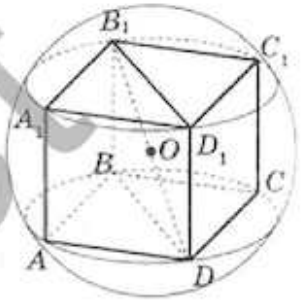


Маємо: $a_n = 2R\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2R}{2R\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}\right)$; $\alpha = 90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}$.

Відповідь: $90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}$.

9. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна призма, навколо якої описано сферу.
Радіус сфери дорівнює половині діагоналі призми.
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, де a, b, c — виміри призми, а d — її діагональ. $a = 6$ дм, $b = 6$ дм, $c = 17$ дм.

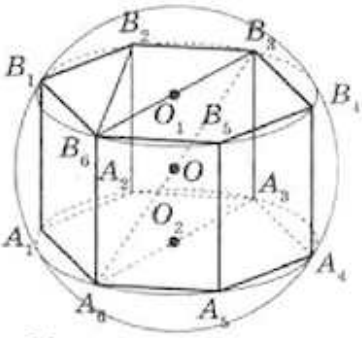


$d^2 = 6^2 + 6^2 + 17^2 = 361$; $d = 19$ дм; $R = \dfrac{d}{2} = 9{,}5$ дм.

Відповідь: 9,5 дм.

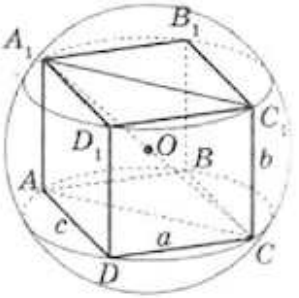
10. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна призма, навколо якої описано сферу (див. рис. до попереднього завдання).
$S_{повн.} = S_{бічн.} + 2S_{осн.} = P_{осн.} \cdot H + 2S_{осн.}$.
В основі призми лежить квадрат, позначимо його сторону a, тоді $P_{осн.} = 4a$, $S_{осн.} = a^2$. R — радіус сфери, d — діагональ призми, H — висота призми, тоді: $d = 2R$; $d^2 = a^2 + a^2 + H^2$; $d = 42$ см; $2a^2 = 42^2 - 14^2$; $a = 28$ см.
$S_{повн} = 4aH + 2a^2 = 4 \cdot 28 \cdot 14 + 2 \cdot 28^2 = 1568 + 1568 = 3136$ см^2.
Відповідь: 3136 см^2.

11. Нехай $A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ — правильна шестикутна призма, вписана в сферу. R сфери дорівнює половині головної діагоналі призми. $R = \dfrac{A_6B_3}{2}$.



У правильній призмі бічні грані однакові, тому $P_{осн.} = 54$ дм; $P_{бічн. гр.} = 178$ дм; $a_{осн.} = 54 : 6 = 9$ дм; $A_3B_3 = H = 178 : 2 - 9 = 80$ дм. $A_6A_3 = 2r$, де r — радіус кола, описаного навколо шестикутника; $r = a_{осн.}$, тому $A_6A_3 = 18$ дм.
З $\Delta A_6A_3B_3$: $A_6B_3^2 = A_3A_6^2 + A_3B_3^2 = 18^2 + 80^2 = 82^2$; $A_6B_3 = 82$ дм.
$R = 82 : 2 = 41$ дм.
Відповідь: 41 дм.

12. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, вписаний у сферу з центром O і радіусом R. $R = A_1C : 2 = d : 2$, d — діагональ паралелепіпеда. Позначимо виміри п. п. як a, b і c, тоді $a = 2x$, $b = 3x$, $c = 6x$.

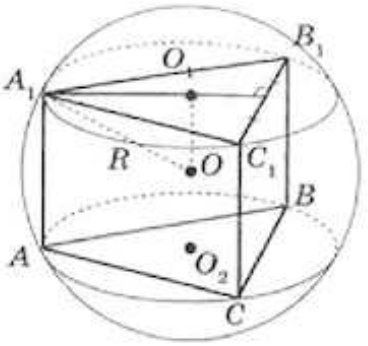


$S_{повн.} = 2(ab + bc + ac) = 2(6x^2 + 18x^2 + 12x^2) = 72x^2 = 1152$ см^2.

alex.net

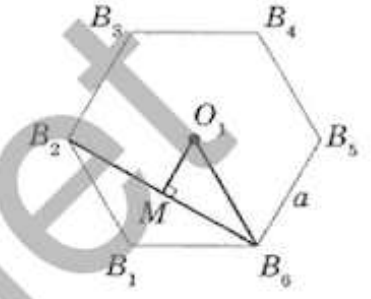
$x = 4$ і $a = 8$ см, $b = 12$ см, $c = 24$ см. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 12^2 + 24^2 = 784$;
$d = 28$. $R = d : 2 = 14$ см.
Відповідь: 14 см.

13. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна призма, вписана в сферу з центром O і радіусом R. O_1 і O_2 — центри кіл, описаних навколо основ призми. $O_1O_2 = 4$ м — висота призми, $O \in O_1O_2$, $O_1O = O_1O_2 : 2 = 2$м. $A_1O = r$, де r — радіус кола, описаного навколо $\Delta A_1B_1C_1$ зі стороною $a = 72 : 3 = 24$ м; $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$ м.



$R^2 = r^2 + OO_1^2 = \left(8\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 196$; $R = 14$ м.
Відповідь: 14 м.

14. Нехай $A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ — правильна призма, вписана в сферу з центром O і радіусом R. $B_2B_6 = 9$ дм, $A_3B_3 = 26$ дм. Знайдемо a — сторону шестикутника.
$O_1M \perp B_2B_6$, тому $MB_6 = B_2B_6 : 2 = 4{,}5$ дм,
$\angle B_1O_1B_6 = 60°$.

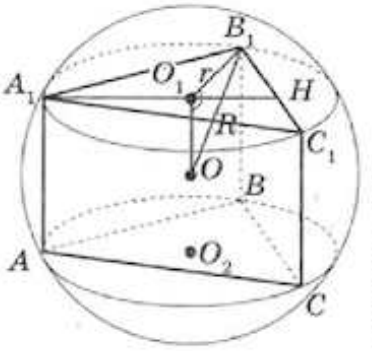


З ΔO_1MB_6: $O_1B_6 = \dfrac{MB_6}{\sin 60°} = \dfrac{9 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ дм.

Отже, велика діагональ шестикутника
$A_3A_6 = 6\sqrt{3}$ дм.

З $\Delta A_6A_3B_3$: $A_6B_3^2 = A_3A_6^2 + A_3B_3^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + 26^2 = 784$;
$A_6B_3 = 28$ дм. $R = A_6B_3 : 2 = 14$ дм.
Відповідь: 14 дм.

15. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник, вписаний у сферу з центром O і радіусом R.
$B_1C_1 = 6$ см, $A_1B_1 = A_1C_1$, $A_1H \perp B_1C_1$, $A_1H = 1$ см.
O_1 і O_2 — центри кіл, описаних навколо основ призми, $O_1O_2 = CC_1 = 24$ см, $OO_1 = O_1O_2 : 2 = 12$ см.
Позначимо через r — радіус кола, описаного навколо основи, тоді $R^2 = r^2 + OO_1^2$.

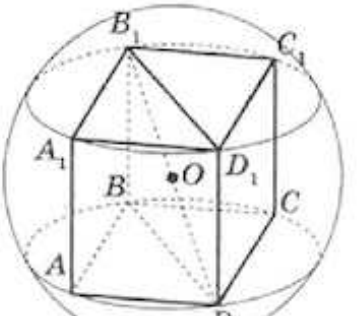


Знайдемо $r = \dfrac{abc}{4S_\Delta}$; $S_\Delta = \dfrac{1}{2}B_1C_1 \cdot A_1H = 3$ см^2.

$A_1B_1 = A_1C_1 = \sqrt{A_1H^2 + B_1H^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ см.

$r = \dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot 6}{4 \cdot 3} = \dfrac{10}{2} = 5$ см.
$R^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$; $R = 13$ см.
Відповідь: 13 см.

16. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна призма, вписана в сферу $(O; R)$.
$B_1D_1 = 12$ см, $AB_1 = 17$ см.
Оскільки призма правильна, то її виміри дорівнюють a, a, b, де $a^2 + a^2 = 12^2$, $a^2 + b^2 = 17^2$.
$OB_1 = R$, $B_1D_1 = d$, тоді $R = d : 2$,
а $d^2 = a^2 + a^2 + b^2 = 361$, $d = 19$ см,
$R = 19 : 2 = 9{,}5$ дм.
Відповідь: 9,5 дм.

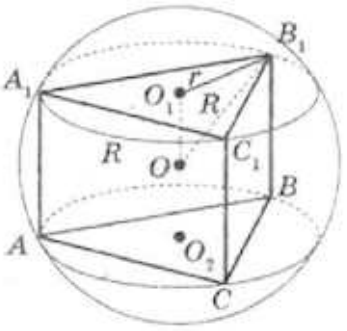


ahdz.net

Відповідь: 9,6 дм.



17. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна призма, вписана в сферу $(O; R)$.



Позначимо сторону основи a, а висоту призми H, де $H = a + 17$.

r — радіус кола, описаного навколо основи.

$R = 14$ дм, $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $OO_1 = H : 2 = \dfrac{a+17}{2}$.

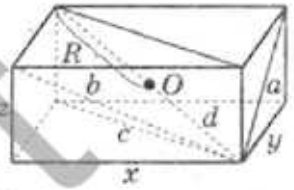
З ΔOO_1B_1: $r^2 + \left(\dfrac{H}{2}\right)^2 = R^2$; $\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{(a+17)^2}{4} = 14^2$; $a = 9$.

$S_{\text{бічн}} = 3aH = 3 \cdot 9 \cdot (9 + 17) = 702$ дм^2.

Відповідь: 702 дм^2.

18. Нехай a, b і c — діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда.

Позначимо за x, y і z — виміри прямокутного паралелепіпеда, d — його діагональ, а R — радіус описаної сфери,



тоді $\begin{cases} z^2 + x^2 = b^2, \\ y^2 + x^2 = a^2, \\ x + y^2 = c^2. \end{cases}$ Додамо почленно ці рівності,

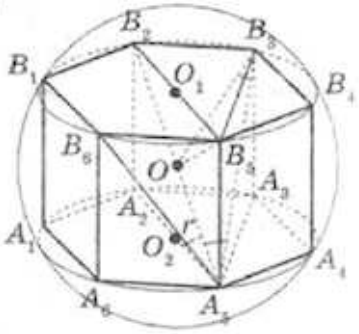
тоді $2(x^2 + y^2 + z^2) = a^2 + b^2 + c^2$.

У свою чергу: $R = \dfrac{d}{2}$, а $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Маємо: $d^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$; $d = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{2}}$; $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2\sqrt{2}}$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2\sqrt{2}}$.

19. Нехай $A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ — правильна призма, вписана в сферу $(0; r)$. $S_{\text{бічн}} = 6aH$, a — сторона основи, H — висота призми.



1) $\angle B_5A_5O = 30°$, $B_5A_5 = H$, $B_2B_5 = 2a$, $B_2A_5 = 2r$.

З $\Delta B_2B_5A_5$: $\sin 30° = \dfrac{B_2B_5}{B_2A_5} = \dfrac{2a}{2r}$; $a = r \cdot \sin 30° = \dfrac{r}{2}$.

$\cos 30° = \dfrac{B_6A_5}{B_2A_5} = \dfrac{H}{2r}$; $H = 2r \cos 30° = r\sqrt{3}$.

$S_{\text{бічн}} = 6 \cdot \dfrac{r}{2} \cdot r\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3}$.

2) $\angle A_6B_3A_5 = 30°$, $\angle A_6A_5B_3 = 90°$ за теоремою про три перпендикуляри $\sin 30° = \dfrac{A_6A_5}{A_6B_3} = \dfrac{a}{2r}$; $a = 2r \sin 30° = r$.

$\cos 30° = \dfrac{B_3A_5}{A_6B_3} = \dfrac{\sqrt{a^2 + H^2}}{2r}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + H^2}}{2r}$; $3r^2 = r^2 + H^2$; $H = r\sqrt{2}$.

$S_{\text{бічн}} = 6 \cdot r \cdot r\sqrt{2} = 6r^2\sqrt{2}$.

3) $\angle B_2A_5A_2 = 30°$, $B_2A_5 = 2r$; $B_2A_2 = H$, $A_2A_5 = 2a$.

З $\Delta B_2A_2A_5$: $\sin 30° = \dfrac{A_2B_2}{B_2A_5} = \dfrac{H}{2r}$; $H = 2r \sin 30° = r$.

$\cos 30° = \dfrac{A_2A_5}{B_2A_5} = \dfrac{2a}{2r}$; $a = r \cos 30° = r\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $S_{\text{бічн}} = 6 \cdot r\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot r = 3r^2 \cdot \sqrt{3}$.

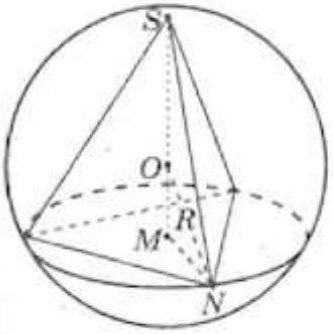
4) $\angle A_6B_3B_5 = 30°$, див. п. 2. $S_{\text{бічн}} = 6r^2\sqrt{2}$.

alg.net

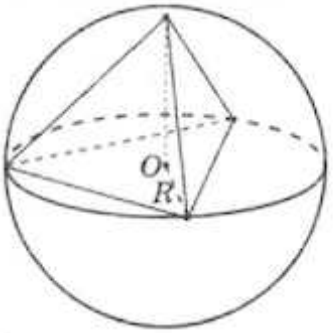
20. Проведемо OM перпендикулярно до площини основи, де O — центр кулі. Нехай N — довільна вершина основи піраміди. Тоді $MN^2 = ON^2 - OM^2 = R^2 - OM^2$ за теоремою Піфагора. Отже, MN — однакова для будь-якої вершини, тому M — центр кола, описаного навколо основи піраміди. А це означає, що O лежить на осі піраміди.

Можливі три випадки:

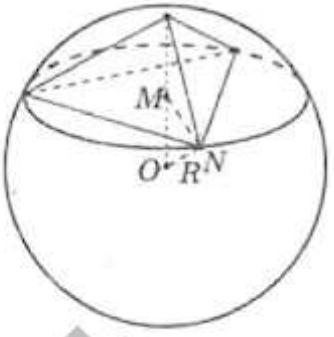
а) Центр кулі лежить на висоті піраміди.



б) Центр кулі співпадає з центром кола, описаного навколо основи.

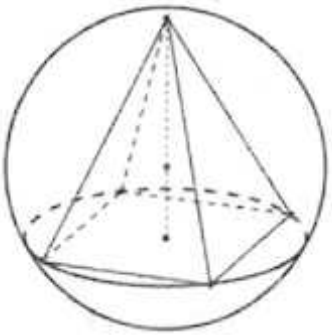


в) Центр кулі лежить на продовженні висоти.

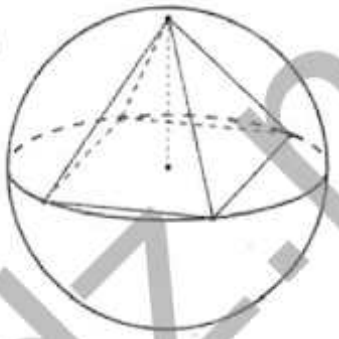


21. Доведення аналогічне до № 20.

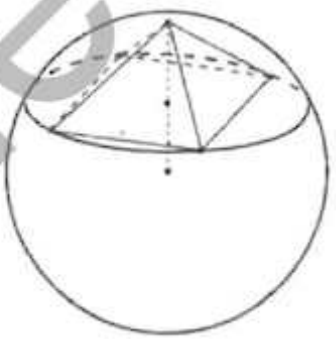
а)



б)



в)



22. Розглянемо сферу $(O; R)$, описану навколо правильної піраміди.

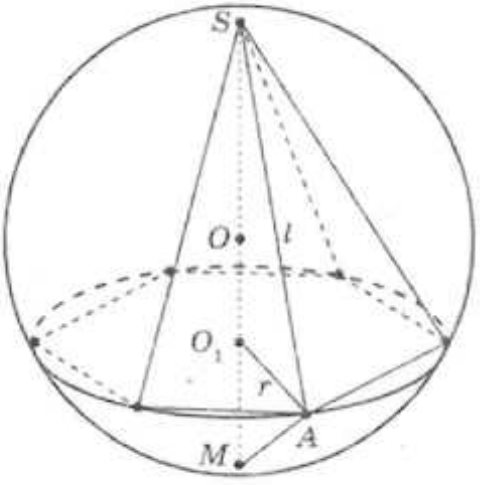
S — вершина піраміди, A — вершина основи піраміди. Продовжимо висоту піраміди до перетину зі сферою M.

Нехай l — довжина ребра піраміди, r — радіус кола, описаного навколо основи, R — радіус сфери, тоді:

ΔSAM: $AO_1^2 = SO_1 \cdot O_1M$; $r^2 = H(2R - H)$;

ΔSO_1A: $SO_1^2 + O_1A^2 = SA^2$; $H^2 + r^2 = l^2$.

Маємо: $l^2 = H^2 + H(2R - H) = 2RH$.



1) Якщо центр описаної сфери знаходиться всередині піраміди, то $R < H$ і $l^2 = 2RH < 2H^2$; $l < H\sqrt{2}$.

2) Якщо центр сфери знаходиться на основі піраміди, то $R = H$ і $l^2 = 2RH = 2H^2$; $l = H\sqrt{2}$.

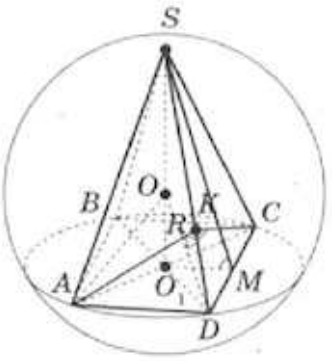
3) Якщо центр сфери знаходиться поза пірамідою, то $R > H$ і $l^2 = 2RH > 2H^2$; $l > H\sqrt{2}$.

Відповідь: 1) $l < H\sqrt{2}$; 2) $l = H\sqrt{2}$; 3) $l > H\sqrt{2}$.

ald2.net

23. Нехай $ABCDS$ — правильна піраміда, вписана в сферу $(O; R)$. Тоді R сфери дорівнює R кола, описаного навколо діагонального перерізу піраміди ACS.

$$R = \frac{abc}{4S_{\triangle}} = \frac{AS \cdot SC \cdot AC}{4S_{ACS}}.$$



$AC = 8\sqrt{2}$ см (діагональ квадрата зі стороною 8 см).

$$h_{\triangle} = \sqrt{AS^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 7.$$

$$S_{ACS} = \frac{1}{2} AC \cdot h_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 7 = 28\sqrt{2} \text{ см}^2.$$

$$R = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8\sqrt{2}}{4 \cdot 28\sqrt{2}} = \frac{81}{14} = 5\frac{11}{14} \text{ см}.$$

Відповідь: $5\frac{11}{14}$ см.

24. Див. рис. до № 23.

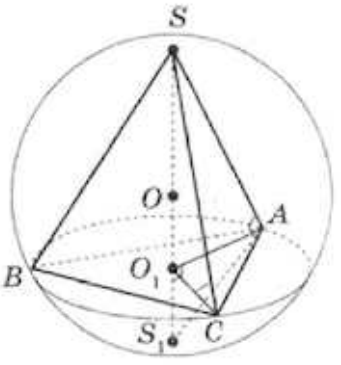
1) Нехай $ABCDS$ — правильна піраміда, вписана в сферу $(O; R)$. $AD = DS = a$.

Аналогічно задачі 23. $R = \frac{AS \cdot SC \cdot AC}{4S_{ACS}}$. $AC = a\sqrt{2}$;

$$h_{\triangle} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}; \quad R = \frac{a \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot 2}{4 \cdot a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2) Нехай $ABCS$ — правильна піраміда, вписана в сферу $(O; R)$.
$AB = AS = a$. Продовжимо висоту піраміди до її перетину зі сферою в точці S_1. $SS_1 = 2R$; $\angle SAS_1 = 90^\circ$ (спирається на діаметр).



$O_1A = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (a — сторона основи),

$$SO_1 = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$S_1O_2 = 2R - SO_1 = 2R - \frac{a\sqrt{6}}{3}$, маємо $O_1A^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$;

$$\frac{a^2}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}\left(2R - \frac{a\sqrt{6}}{3}\right); \quad \frac{2Ra\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3}; \quad R = \frac{3a}{2\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

25. Див. рис. до № 24.

Нехай $ABCS$ — правильна піраміда, вписана в сферу $(O; R)$

$\angle BSC = 90^\circ$, $BC = a$, тому $BS = AS = CS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

O_1 — центр кола, описаного навколо ΔABC, тоді:

$$AO_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad SO_1^2 = SA^2 - AO_1^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}; \quad SO_1 = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Аналогічно задачі 24 2) розглянемо ΔSAS_1 ($\angle SAS_1 = 90^\circ$).

aldz.net

$S_1O_1 = 2R - SO_1 = 2R - \frac{a}{\sqrt{6}}$; $AO_1^2 = SO_1 \cdot S_1O_1$; $\frac{a^2}{3} = \frac{a}{\sqrt{6}}\left(2R - \frac{a}{\sqrt{6}}\right)$;

$\frac{2Ra}{\sqrt{6}} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Відповідь: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

26. Розмістимо піраміду так, щоб її вершина знаходилась у початку координат, а бічні ребра на осях, тоді $A(0; 0; 2)$, $B(0; 23; 0)$, $C(14; 0; 0)$, $S(0; 0; 0)$. Нехай $O(x_0; y_0; z_0)$ — центр сфери, описаної навколо $ABCS$, тоді

$x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - 2)^2 = x_0^2 + (y_0 - 23)^2 + z_0^2 = (x_0 - 14)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$;

$x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - 2)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$; $-4z_0 + 4 = 0$; $z_0 = 1$;

$x_0^2 + (y_0 - 23)^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$; $-46y_0 + 529 = 0$; $y_0 = 11{,}5$;

$(x_0 - 14)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$; $-28x_0 + 196 = 0$; $x_0 = 7$.

Маємо: $R^2 = 1^2 + 11{,}5^2 + 7^2 = 182{,}25$; $R = 13{,}5$ дм.

Відповідь: 13,5 дм.

27. Див. рис. до № 23. Нехай $ABCDS$ — правильна піраміда, вписана в сферу $(O; R)$

$a = 4\sqrt{2}$ дм. $\angle SCA = 60°$.

$R_{сф} = R_{кола}$, описаного навколо ΔACS.

$AC = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$ дм.

ΔACS — рівнобедрений ($AS = CS$) з кутом 60°, тому він рівносторонній

і $AS = CS = AC = 8$ дм. $R = \frac{AC\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ дм.

Відповідь: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ дм.

28. Див. рис. до № 25. Нехай $ABCS$ — правильний тетраедр, вписаний у сферу $(O; R)$.

O_1 — центр кола, описаного навколо його основи.

$AB = AC = BC = AS = BS = CS = a$.

З ΔSO_1A: $\angle O_1 = 90°$; $SO_1 = H$; $SA = a$; $O_1A = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$SO_1^2 = SA^2 - O_1A^2$; $H^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$; $H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $a = H\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Продовжимо висоту піраміди до її перетину зі сферою в точці S_1:

$\angle SAS_1 = 90°$ (спирається на діаметр), $S_1O_1 = 2R - H$; $AO_1 \perp SS_1$ і $AO_1^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$.

$\left(\frac{H\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 3}\right)^2 = H(2R - H)$; $\frac{H^2}{2} = H(2R - H)$; $2R = \frac{H}{2} + H$; $R = \frac{3}{4}H$.

Відповідь: $\frac{3}{4}H$.

29. Див. рис. до № 25.

Нехай $ABCS$ — правильна піраміда, вписана в сферу $(O; R)$.

$R_1 = 8$ м і $R_2 = 7$ м — радіуси кіл, описаних навколо основи і бічної грані піраміди.

Оскільки в основі лежить правильний трикутник, то його сторона $a = 8\sqrt{3}$ м.

Якщо бічну сторону рівнобедреного трикутника, який є бічною гранню піраміди, позначити b, маємо $b^2 = 112$.

alez.net

Отже, $SO_1 = \sqrt{112 - 64} = \sqrt{48}$; $SO_1 = 4\sqrt{3}$ м. SS_1 (див. № 28) $= 2R - 4\sqrt{3}$.

З ΔSAS_1: $AO_1^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$; $8^2 = 4\sqrt{3}\left(2R - 4\sqrt{3}\right)$; $64 = 8\sqrt{3}R - 48$; $R\sqrt{3} = 14$;

$R = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ м.

Відповідь: $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ м.

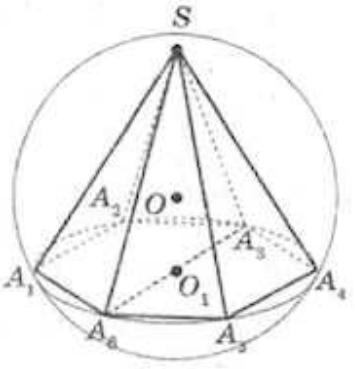
30. Див. рис. до № 23. Нехай $ABCDS$ — правильна піраміда, вписана в сферу $(O; R)$. $R_1 = 4$ м і $R_2 = 3$ м — радіуси кіл, описаних навколо основи і бічної грані піраміди.

Оскільки в основі лежить квадрат, то його сторона $a = 4\sqrt{2}$. b — бічна сторона бічної грані, тоді $b = 2\sqrt{6}$. $SO_1 = \sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2 - 4^2} = 2\sqrt{2}$ м.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ м^2. $R = \dfrac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 8}{4 \cdot 8\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ м.

Відповідь: $3\sqrt{2}$ м.

31. Нехай $A_1A_2A_3A_4A_5A_6S$ — правильна піраміда, вписана в сферу $(O; R)$. $R_1 = 6$ м, $R_2 = 5$ м — радіуси кіл, описаних навколо основи і бічної грані піраміди. В основі лежить правильний шестикутник зі стороною $a = R_1 = 6$ м. Якщо бічну сторону бічної грані позначити за b, то $b = 3\sqrt{10}$. Радіус сфери, описаної навколо піраміди дорівнює радіусу кола, описаного навколо її діагонального перерізу, отже, $R = \dfrac{A_6S \cdot A_3S \cdot A_3A_6}{4S_{A_3A_6S}}$.



$O_1S = \sqrt{\left(3\sqrt{10}\right)^2 - 6^2} = 3\sqrt{6}$ м.

$S_{A_3A_6S} = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3\sqrt{6} = 18\sqrt{6}$ м^2.

$R = \dfrac{3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 12}{4 \cdot 18\sqrt{6}} = \dfrac{15}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ м.

Відповідь: $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ м.

32. Див. рис. до № 25. 1) Якщо загальна кількість ребер піраміди 6, то піраміда трикутна.

Розглянемо правильну трикутну піраміду $ABCS$, вписану в сферу $(O; R)$. O_1 — центр кола, описаного навколо ABC. Нехай a — сторона основи, тоді

$O_1S = a$, $O_1A = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Продовжимо висоту піраміди до перетину зі сферою S_1. $\angle SAS_1 = 90°$ (спирається на діаметр). $SS_1 = 2R$; $O_1S_1 = 2R - a$.

З ΔSAS_1 маємо: $AO_1^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$; $\dfrac{a^2}{3} = a(2R - a)$; $2R = \dfrac{a}{3} + a$; $a = \dfrac{3}{2}R$.

$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9R^2 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 4} = \dfrac{9}{16}R^2\sqrt{3}$.

Відповідь: $\dfrac{9}{16}R^2\sqrt{3}$.

alqz.net

2) Див. рис. до № 23. Кількість вершин основи піраміди $= \frac{8}{2} = 4$. Розглянемо правильну чотирикутну піраміду $ABCDS$, вписану в сферу $(O; R)$. O_1 — центр кола, описаного навколо $ABCD$.

Нехай a — сторона основи, тоді $SO_1 = a$.

З ΔACS: $AC = a\sqrt{2}$; $O_1C = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. $S_{ACS} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$;

$R = \frac{3a^2 \cdot a\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot 4a^2\sqrt{2}}$; $R = \frac{3a}{4}$; $a = \frac{4R}{3}$. $S_{ABCD} = a^2 = \frac{16R^2}{9}$.

Відповідь: $\frac{16R^2}{9}$.

3) Див. рис. до № 31. Якщо $n = 12$, то кількість вершин основи $12 : 2 = 6$. Розглянемо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6S$ — правильну піраміду, вписану в сферу $(O; R)$. O_1 — центр кола, описаного навколо основи.

Нехай $A_1A_2 = a$, тоді $SO_1 = a$. З ΔSO_1A_3 маємо $SA_3^2 = a^2 + a^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2$,

$S_{A_6SA_3} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2$; $R = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a}{4a^2} = a$; $S_{осн} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$.

Відповідь: $\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$.

33. Див. рис. до № 23. Розглянемо $ABCDS$ — правильну піраміду, вписану в сферу $(O; R)$.

$DS = 4$ дм, $\angle SMO_1 = 30°$, O_1 — центр кола, описаного навколо основи. $SM \perp CD$. a — сторона основи.

З ΔSMD: $MD = \frac{a}{2}$; $SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = \sqrt{16 - \frac{a^2}{4}}$.

З ΔSO_1C: $SO_1 = \sqrt{SC^2 - O_1C^2} = \sqrt{16 - \frac{a^2}{4}}$.

$O_1S = SM : 2$ (як катет, що лежить проти кута 30°).

Маємо: $\sqrt{16 - \frac{a^2}{4}} = 2\sqrt{16 - \frac{a^2}{2}}$; $16 - \frac{a^2}{4} = 64 - 2a^2$; $a = \frac{8\sqrt{3}}{7}$ дм.

$AC = a\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{6}}{7}$ дм; $SO_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$ дм; $S_{ASC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{7} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{6}}{7\sqrt{7}}$ дм^2.

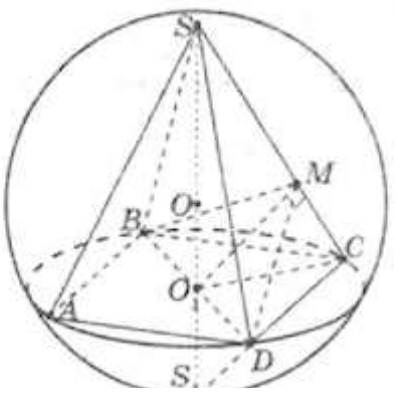
$R = \frac{4 \text{ дм} \cdot 4 \text{ дм} \cdot 8\sqrt{6} \text{ дм} \cdot 7\sqrt{7}}{7 \cdot 4 \cdot 16 \cdot \sqrt{6} \text{ дм}^2} = 2\sqrt{7}$ дм.

Відповідь: $2\sqrt{7}$ дм.

34. Двогранний кут при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди не може дорівнювати 60°. Тому розв'яжемо задачу у загальному вигляді. Нехай даний кут дорівнює α, а сторона основи a см. Розглянемо піраміду $ABCDS$.

O — центр описаної кулі, O_1 — центр кола, описаного навколо основи.

Проведемо $O_1M \perp SC$. $\angle BMD = \alpha$.



ΔMO_1D: $\angle O_1MD = \frac{\alpha}{2}$; $O_1D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

alozi.net

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{O_1M\sqrt{2}}{a};\quad O_1M=\frac{a\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

ΔO_1MC: $\angle O_1MC=90^\circ$; $O_1C=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\sin\angle O_1CM=\frac{O_1M}{O_1C}$;

$$\sin\angle O_1CM=\frac{a\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot 2}{2\cdot a\sqrt{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};\quad \sin\angle O_1CM=\frac{\operatorname{tg}\angle O_1CM}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\angle O_1CM}}. \qquad (1)$$

$$\Delta SO_1C:\ \operatorname{tg}\angle O_1CM=\frac{O_1S}{O_1C}=\frac{H\sqrt{2}}{a}. \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1), маємо: $\sin\angle O_1CM=\dfrac{H\sqrt{2}}{a\sqrt{1+\frac{2H^2}{a^2}}}=\dfrac{H\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+2H^2}}$.

У свою чергу $\dfrac{H\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+2H^2}}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, звідки $H=\sqrt{-\dfrac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}}=\dfrac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-2\cos\alpha}}$.

Продовжимо висоту піраміди до перетину зі сферою S_1. $\angle SCS_1=90^\circ$ (спирається на діаметр); $O_1C^2=O_1S\cdot O_1S_1$;

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=H(2R-H);\quad \frac{a^2}{2}=2RH-H^2;\quad R=\frac{a^2+2H^2}{4H};$$

$$R=\left(a^2-\frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\right):\frac{4a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-2\cos\alpha}}=-\frac{a^2\left(\cos\alpha-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sqrt{-2\cos\alpha}}{4a\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

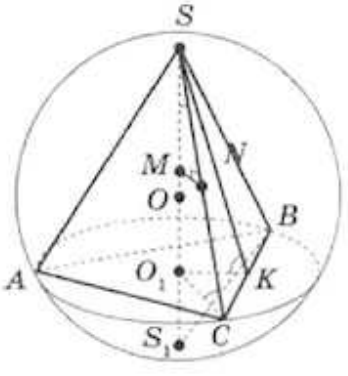
$$=\frac{-a\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos\alpha}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}.$$

35. Розглянемо $ABCS$ — правильну піраміду, вписану в сферу $(O; R)$. $\angle SBO_1=\beta$. O_1 — центр кола, описаного навколо ABC. M — середина O_1S, SK — апофема. $MN\perp SK$, $N\in SK$, $MN=d$.

Продовжимо висоту піраміди до перетину зі сферою S_1. Тоді $\angle SBS_1=90^\circ$ (спирається на діаметр), $SS_1=2R$; $BO_1\perp SS_1$. Маємо $BO_1^2=SO_1\cdot O_1S_1$, a — сторона основи, H — висота піраміди, тоді $\dfrac{a^2}{3}=H(2R-H)$, звідси $R=\dfrac{a^2+3H^2}{6H}$.

Тепер треба виразити a і H через d і β.

З ΔSO_1B: $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{O_1S}{O_1B}=\dfrac{H\sqrt{3}}{a}$; $a=\dfrac{H\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\beta}$.



Позначимо $\angle SKO_1=\alpha$, $\angle MSN=\gamma$, тоді $\alpha+\gamma=90^\circ$.

З ΔSO_1K: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2H\sqrt{3}}{a}$, тому $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$.

З ΔSNM: $\sin\gamma=\dfrac{2d}{H}$, $\sin\gamma=\cos\alpha=\dfrac{2d}{H}$.

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{2d}{H}=\frac{1}{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}};$$

aldz.net

$H = 2d\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\beta}$; $a = \dfrac{H\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{2d\sqrt{3}\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta}$;

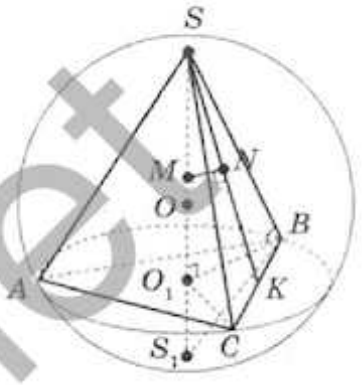
$$R = \frac{\dfrac{12d^2(1 + 4\operatorname{tg}^2\beta)}{\operatorname{tg}^2\beta} + 12d^2(1 + 4\operatorname{tg}^2\beta)}{12d\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{12d^2(1 + 4\operatorname{tg}^2\beta)}{\sin^2\beta \cdot 12d\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{d\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\beta}}{\sin^2\beta}.$$

Відповідь: $\dfrac{d\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\beta}}{\sin^2\beta}$.

2) Розглянемо $ABCS$ — правильну піраміду, вписану в сферу $(O; R)$.

Враховуючи висновки попередньої задачі, маємо $R = \dfrac{a^2 + 3H^2}{6H}$.

SK — апофема, $\angle SKO_1 = \alpha$, O_1 — радіус кола, описаного навколо ABC.
M — середина SO_1. $MN \perp SC$, $MN = m$.
Позначимо $\angle SCO_1 = \beta$, $\angle MSN = \gamma$, тоді



ΔSO_1C: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{O_1S}{O_1C} = H : \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2H\sqrt{3}}{a}$.

ΔSNM: $\sin\gamma = \dfrac{MN}{MS} = \dfrac{2m}{H}$;
$\sin\gamma = \cos\beta$ $(\gamma + \beta = 90^\circ)$.

$\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}$, а $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ (див. п. 1).

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2m}{H}, \text{ звідси } H = m\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

ΔSO_1K: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{O_1S}{O_1K} = H : \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{6H}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2H\sqrt{3}}{a}$; $a = \dfrac{2H\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2m\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}$.

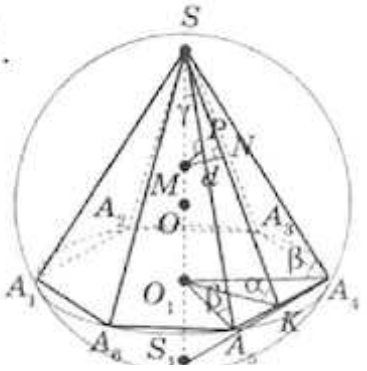
$$R = \frac{\dfrac{12m^2(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 3m^2(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{6m\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3m(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)\left(\dfrac{4}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1\right)}{6\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{m(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2}{2\operatorname{tg}^2\alpha\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{m}{2\operatorname{tg}^2\alpha}(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Відповідь: $\dfrac{m}{2\operatorname{tg}^2\alpha}(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}$.

36. 1) Розглянемо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6S$ — правильну піраміду, вписану в сферу $(O; R)$.
O_1 — центр кола, описаного навколо шестикутника, a — сторона основи, в правильному шестикутнику $R_1 = a$, отже, $O_1A_4 = a$, H — висота призми.
Продовжимо висоту до перетину зі сферою S_1.
$\angle SA_4S_1 = 90^\circ$ (спирається на діаметр), $SS_1 = 2R$.

ΔSA_4S_1: $O_1A_4^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$; $a^2 = H(2R - H)$; $R = \dfrac{a^2 + H^2}{2H}$.



$\angle SA_1A_1 = \beta$, SK — апофема,
M — середина H, $MN \perp SK$.
Позначимо $\angle MSN = \gamma$, $\angle SKO_1 = \alpha$, тоді

ΔSO_1A_4: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{O_1S}{O_1B} = \dfrac{H}{a}$; $a = \dfrac{H}{\operatorname{tg}\beta}$.

ΔSNM: $\sin\gamma = \dfrac{MN}{MS} = \dfrac{2d}{H}$.

aldz.net

ΔSO_1K: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{O_1S}{O_1K} = \dfrac{2H}{a\sqrt{3}}$.

Порівнюючи $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$, маємо $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{3}}$.

$\sin\gamma = \cos\alpha$ $(\gamma + \alpha = 90°)$;

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4\operatorname{tg}^2\beta}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{2d}{H};$$

$$H = \frac{2d\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}}{\sqrt{3}}; \quad a = \frac{2d\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\cdot\sqrt{3}};$$

$$R = \frac{\dfrac{4d^2(3+4\operatorname{tg}^2\beta)}{3\operatorname{tg}^2\beta} + \dfrac{4d^2(3+4\operatorname{tg}^2\beta)}{3}}{\dfrac{4d\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}}{\sqrt{3}}} = \frac{4d^2(3+4\operatorname{tg}^2\beta)\cdot\sqrt{3}}{3\sin^2\beta\cdot 4d\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}} =$$

$$= \frac{d\sqrt{3}}{3\sin^2\beta}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Відповідь: $\dfrac{d\sqrt{3}}{3\sin^2\beta}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}$.

2) Розглянемо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6S$ — правильну піраміду, вписану в сферу $(O; R)$.

Враховуючи результати попередньої задачі, маємо: $R = \dfrac{a^2+H^2}{2H}$.

$\angle O_1KS = \alpha$, $\angle O_1A_5S = \beta$, $\angle MSP = \varphi$, $MP \perp SA_5$, $MP = m$.

ΔSO_1K: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{O_1S}{O_1K} = \dfrac{2H}{a\sqrt{3}}$.

ΔSPM: $\sin\varphi = \dfrac{MP}{MS} = \dfrac{2m}{H}$.

ΔSO_1A_5: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{H}{\alpha}$.

Маємо: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2}$; $\sin\varphi = \cos\beta$ $(\varphi + \beta = 90°)$;

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{3\operatorname{tg}^2\alpha}{4}}} = \frac{2m}{H}; \quad H = m\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$a = \frac{2H}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2m\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\alpha}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha};$$

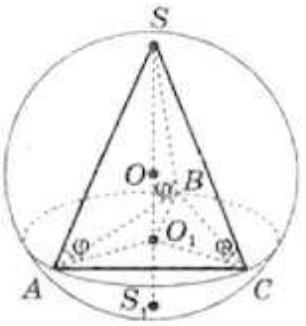
$$R = \frac{\dfrac{4m^2(4+3\operatorname{tg}^2\alpha)}{3\operatorname{tg}^2\alpha} + m^2(4+3\operatorname{tg}^2\alpha)}{2m\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{m^2(4+3\operatorname{tg}^2\alpha)}{2m\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\alpha}}\left(\frac{4}{3\operatorname{tg}^2\alpha}+1\right) =$$

$$= \frac{m(4+3\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{6\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{m}{6}(4+3\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Відповідь: $\dfrac{m}{6}(4+3\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}$.

aldz.net

37. Розглянемо $ABCS$ — піраміду, вписану в сферу $(O; R)$. Якщо всі бічні ребра утворюють з площиною основи рівні кути, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи.



Позначимо його радіус R_1, тоді $R_1 = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

Продовжимо висоту піраміди до перетину зі сферою S_1.
$\angle SCS_1 = 90^\circ$ (спирається на діаметр),
$SS_1 = 2R$; $SO_1 = H$; $O_1S = 2R - H$.
ΔSCS_1: $O_1C^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$; $R_1^2 = H(2R - H)$.

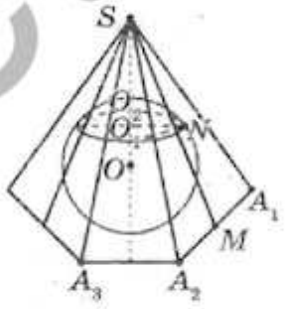
$$\Delta SO_1C\text{: } \operatorname{tg}\varphi = \frac{O_1S}{O_1C} = \frac{H}{R_1} = \frac{2H\sin\alpha}{a}; \quad H = \frac{a\operatorname{tg}\varphi}{2\sin\alpha};$$

$$R = \frac{R_1^2 + H^2}{2H} = \left(\frac{a^2}{4\sin^2\alpha} + \frac{a^2\operatorname{tg}^2\varphi}{4\sin^2\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{a\operatorname{tg}\varphi}\right) = \frac{a^2}{4\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\sin\alpha}{a\operatorname{tg}\varphi} =$$

$$= \frac{a}{4\sin\alpha\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{a}{2\sin\alpha\sin 2\varphi}.$$

Відповідь: $\dfrac{a}{2\sin\alpha\sin 2\varphi}$.

38. Розглянемо кулю з центром O, вписану в правильну піраміду.



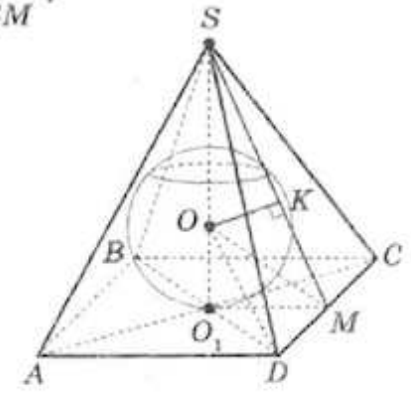
Проведемо $OO_2 \perp (A_1A_2...A_n)$. Нехай N — точка дотику. Проведемо $NO_1 \perp OO_2$. Оскільки в правильній піраміді всі двогранні кути при основі рівні, то всі прямі, які перпендикулярні до OO_2 з будь-якої точки дотику кулі до бічної грані, лежать в одній площині. Усі відстані від точок дотику до O_1 теж будуть рівними. Усі точки дотику лежать на колі з центром O_1. Тому $O_1 \in OS$ і OO_1 співпадає з віссю піраміди, отже, центр кулі міститься на осі піраміди.

39. Якщо двогранні кути при основі піраміди рівні, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу. А якщо в основу піраміди можна вписати коло й основа висоти піраміди є центром цього кола, то в цю піраміду можна вписати сферу.

40. Якщо піраміда $SA_1...A_n$ — правильна, то центр O вписаної сфери міститься на висоті даної піраміди. Отже, піраміда $OA_1...A_n$ теж правильна, а в будь-яку правильну піраміду можна вписати сферу.

41. Розглянемо $ABCDS$ — правильну піраміду, описану навколо сфери $(O; R)$.
$ABCD$ — квадрат зі стороною 8 м. $SD = 8{,}5$ м. SM — апофема, K — точка дотику сфери з бічною гранню. $OK \perp SM$, $K \in SM$. O_1 — центр квадрата.

$\Delta SKO \sim \Delta SO_1M$ (за гострим кутом). Отже, $\dfrac{KO}{SO} = \dfrac{O_1M}{SM}$.



$KO = R$, $SO = H - R$, $O_1M = 8 : 2 = 4$ м.
$SM = \sqrt{SD^2 - DM^2} = \sqrt{8{,}5^2 - 4^2} = 7{,}5$ м.

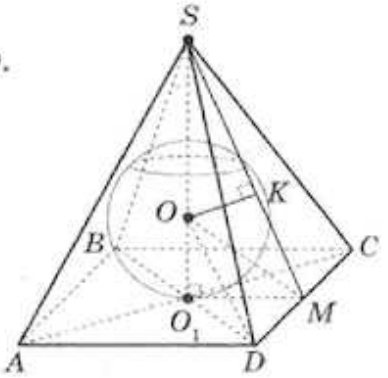
$$SO_1 = \sqrt{SD^2 - O_1D^2} = \sqrt{8{,}5^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{161}}{2}.$$

Маємо: $\dfrac{R}{\dfrac{\sqrt{161}}{2} - R} = \dfrac{2\cdot 4}{15}$; $R = \dfrac{4\sqrt{161}}{23}$ м.

Відповідь: $\dfrac{4\sqrt{161}}{23}$ м.

alex.net

42. Розглянемо $ABCDS$ — піраміду, описану навколо кола $(O; R)$.
$AC = 8$ дм, $BD = 6$ дм, O_1 — центр кола, вписаного в ромб, $SO_1 = 1$ дм. SM — апофема, $K \in SM$, $OK \perp SM$. K — точка дотику сфери до бічної грані.
$\Delta SKO \sim \Delta SO_1M$ (за гострим кутом).



Отже, $\frac{SO_1}{O_1M} = \frac{SK}{OK}$; $O_1M = r$ кола, вписаного в $ABCD$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 24$ дм^2.

$DC = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = 5$ дм.

$r = \frac{S_{ABCD}}{2DC} = 2{,}4$ дм; $O_1M = 2{,}4$ дм.

$SO = H - R = 1 - R$;

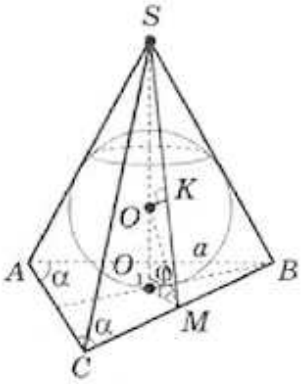
$SK = \sqrt{SO^2 - OK^2} = \sqrt{(1-R)^2 - R^2} = \sqrt{1 - 2R}$; $OK = R$.

Маємо: $\frac{1}{2{,}4} = \frac{\sqrt{1-2R}}{R}$; $R = 2{,}4\sqrt{1-2R}$; $R^2 + 11{,}52R - 5{,}76 = 0$;

$R = -5{,}76 \pm 6{,}24$; $R = 0{,}48$ дм.

Відповідь: 0,48 дм.

43. Розглянемо $ABCS$ — піраміду, описану навколо сфери $(O; R)$. $AB = BC = a$, $\angle A = \angle C = \alpha$. O_1 — центр кола, вписаного в ΔABC. SM — апофема, $K \in SM$, $OK \perp SM$, K — точка дотику сфери до BCS, $\angle SMO_1 = \varphi$. Знайдемо r — радіус кола, вписаного в ΔABC. H — середина AC, $HC = BC \cos\alpha = a\cos\alpha$; $AC = 2a\cos\alpha$.



$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin\alpha = a^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$.

$r = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{a + a + 2a\cos\alpha} = \frac{a \sin 2\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}$.

ΔSO_1M: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{O_1S}{O_1M}$; $O_1S = \frac{a\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \operatorname{tg}\varphi$;

$\angle OSK = \beta = 90° - \varphi$.

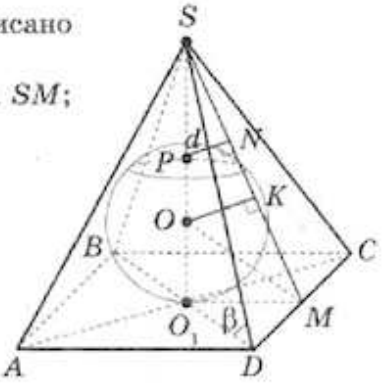
ΔSKO: $\sin\beta = \frac{OK}{OS} = \frac{R}{OS} = \cos\varphi$; $OS = \frac{R}{\cos\varphi}$;

$SO + OO_1 = SO_1$; $\frac{R}{\cos\varphi} + R = \frac{a\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \operatorname{tg}\varphi$;

$R = \frac{a\sin 2\alpha \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\varphi}{2(1+\cos\alpha)(1+\cos\varphi)} = \frac{a\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \cdot \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{a\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

Відповідь: $\frac{a\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

44. 1) Розглянемо правильну піраміду $ABCDS$, в яку вписано сферу $(O; R)$.
$\angle SDB = \beta$. P — середина SO_1, SM — апофема. $PN \perp SM$; $PN = d$. $OK \perp SM$; $OK = R$.
Нехай a — сторона основи, H — висота піраміди.
$\Delta PNS \sim \Delta OKS$ (за спільним гострим кутом).



$\frac{PN}{PS} = \frac{OK}{OS}$; $\frac{2d}{H} = \frac{R}{H-R}$ (1).

ΔSO_1D: $\operatorname{tg}\beta = \frac{H\sqrt{2}}{a}$; $a = H\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta$.

alaz.net

ΔOO_1M: $\operatorname{tg}\angle OMO_1 = \dfrac{OO_1}{O_1M} = \dfrac{2R}{a}$; $\operatorname{tg}\angle OMO_1 = \sqrt{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$;

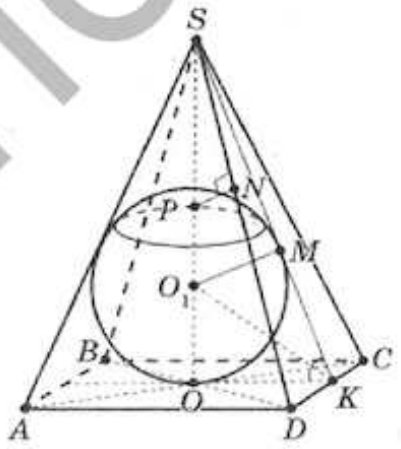
$R = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = H\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, звідси $H = R\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} = 2R\dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}-1}$.

Підставмо H в (1), тоді: $\dfrac{2d\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}-1\right)}{2R\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}} = \dfrac{R}{\dfrac{2R\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}-1} - R}$;

$\dfrac{d\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}-1\right)}{R\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}} = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}-1}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}+1}$; $R = \dfrac{d\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}+1\right)}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}} = d\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}\right)$.

Відповідь: $d\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}\right)$.

2) Розглянемо сферу $(O_1; R)$, вписану в правильну піраміду $ABCDS$. SK — апофема, $\angle SKO = \alpha$. P — середина OS, $d(P; SD) = m$, M — точка дотику, H — висота піраміди.



$\sin\angle O_1SM = \dfrac{O_1M}{SO_1} = \dfrac{R}{H-R}$; $\angle O_1SM = 90^\circ - \alpha$, тому

$\dfrac{R}{H-R} = \cos\alpha$; $R = \dfrac{H\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Нехай $\angle SDO = \beta$, тоді:

ΔSOK: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2H}{a}$; ΔSOD: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{H\sqrt{2}}{a}$,

отже, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2}$.

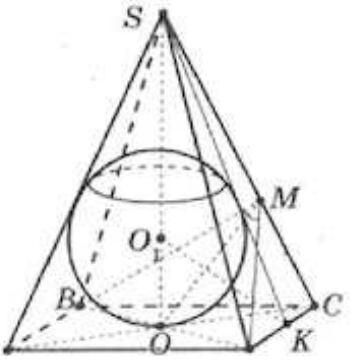
ΔMNS: $\sin\angle PSN = \dfrac{PN}{PS} = \dfrac{2m}{H}$;

$\angle PSN = 90^\circ - \beta$, тому $\sin\angle PSN = \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ і $\dfrac{2m}{H}$,

звідки $H = m\sqrt{2}\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}$, тому $R = \dfrac{m\sqrt{2}\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Відповідь: $\dfrac{m\sqrt{2}\cos\alpha\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}}{1+\cos\alpha}$.

3) Розглянемо сферу $(O_1; R)$, вписану в правильну піраміду $ABCDS$.



З центра O основи проведемо $OM \perp CS$.

За умовою $\angle BMD = \sigma$, а сторона основи — a.

SK — апофема. Нехай $\angle SKO = \alpha$, тоді $\angle O_1KO = \dfrac{\alpha}{2}$.

ΔO_1OK: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2R}{a}$; $R = \dfrac{a\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{2}$.

alaz.net

Користуючись таблицею ОК-10, маємо: A D

$$\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\sigma}{2};\quad \sin^2\alpha = 2\cos^2\frac{\sigma}{2};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-2\cos^2\frac{\sigma}{2}} = \sqrt{-\cos\sigma};$$

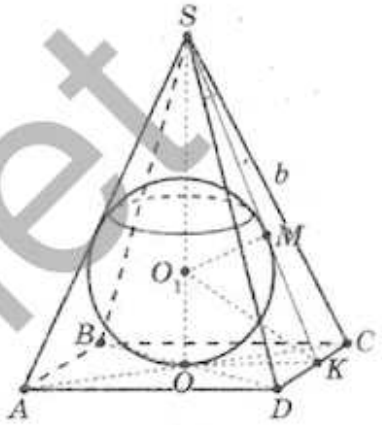
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{-\cos\sigma}}{1+\sqrt{-\cos\sigma}}} = \sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{-\cos\sigma}\right)^2}{1+\cos\sigma}} = \frac{1-\sqrt{-\cos\sigma}}{\sqrt{1+\cos\sigma}};$$

$$R = \frac{a\left(1-\sqrt{-\cos\sigma}\right)}{2\sqrt{1+\cos\sigma}}.$$

Відповідь: $\dfrac{a\left(1-\sqrt{-\cos\sigma}\right)}{2\sqrt{1+\cos\sigma}}$.

4) Розглянемо сферу $(O_1; R)$, вписану в правильну піраміду $ABCDS$. $\angle BSC = \gamma$, $CS = BS = b$, SK — апофема. Нехай $\angle SKO = \alpha$, $BC = a$.

$$\left.\begin{aligned}&\Delta SOK:\ \cos\alpha = \frac{a}{2SK}\\ &\Delta BKS:\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{2SK}\end{aligned}\right\},\ \text{отже,}\ \cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$



M — точка дотику, H — висота піраміди.

$$\Delta SMO_1:\ \sin\angle MSO_1 = \sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha = \frac{R}{H-R};$$

$$R = \frac{H\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

$$\Delta SKB:\ \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{SK}{SB} = \frac{SK}{b};\quad SK = b\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

$$\Delta SOK:\ \sin\alpha = \frac{H}{SK} = \frac{H}{b\cdot\cos\frac{\gamma}{2}};\quad H = b\sin\alpha\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Отже, $R = \dfrac{b\sin\alpha\cos\frac{\gamma}{2}\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{b\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{b\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} =$

$$= \frac{b\sqrt{\cos\gamma}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{b\sqrt{\cos\gamma}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Відповідь: $\dfrac{b\sqrt{\cos\gamma}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$.

45. 1) Розглянемо сферу $(O; R)$, вписану в правильну піраміду $A_1A_2\ldots A_6S$. $\angle SA_6O_1 = \beta$, O_1 — центр шестикутника. N — середина O_1S, SK — апофема, $NM \perp SK$, $NM = d$. Нехай a — сторона основи, $\angle O_1KS = \alpha$.

$$\left.\begin{aligned}&\Delta SO_1A_6:\ \operatorname{tg}\beta = \frac{H}{a}\\ &\Delta SO_1K:\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2H}{a\sqrt{3}} = \frac{2H\sqrt{3}}{3a}\end{aligned}\right\},\ \text{тому}\ \operatorname{tg}\beta\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\alpha.$$

P — точка дотику. $\Delta SMN \sim \Delta SPO$,

alldz.net

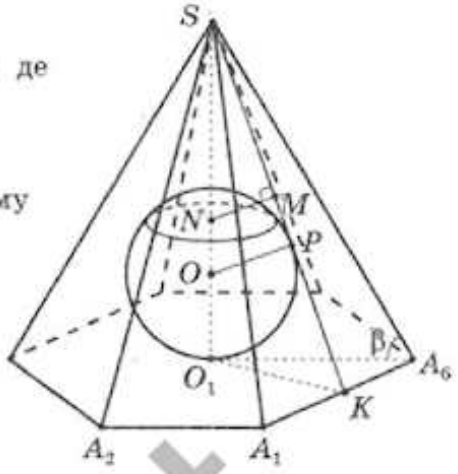
тому $\frac{NM}{NS} = \frac{OP}{OS}$; $\frac{2d}{H} = \frac{R}{H-R}$; $R = \frac{2dH}{H+2d}$.

ΔSMN: $\sin\angle MSN = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \frac{2d}{H}$; $H = \frac{2d}{\cos\alpha}$.

$$R = \frac{2d \cdot \frac{2d}{\cos\alpha}}{\frac{2d}{\cos\alpha} + 2d} = \frac{4d^2}{\cos\alpha} : \left(\frac{2d(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}\right) = \frac{2d}{1+\cos\alpha},$$ де

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}},$$ тому

$$R = \frac{2d}{1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}}} = \frac{2d\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}}{\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}+\sqrt{3}}.$$



Відповідь: $\frac{2d\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}}{\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\beta}+\sqrt{3}}$.

2) Розглянемо малюнок. SK — апофема; $\angle SKO_1 = \alpha$, O_1 — центр шестикутника, M — середина висоти, $MN \perp SA_1$, $MN = m$. Нехай $\angle SA_1O_1 = \beta$, тоді

$\sin\angle MSN = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\alpha = \frac{2m}{H}$; $H = \frac{2m}{\cos\beta}$.

P — точка дотику.

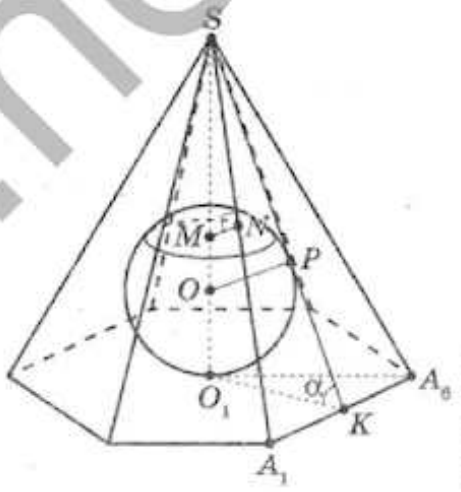
$\sin\angle PSO = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \frac{OP}{OS} = \frac{R}{H-R}$;

$R = \frac{H\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Знайдемо зв'язок між α і β.

$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$ (див. № 45(1)).

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{2}{\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\beta}}.$$



Отже, $R = \frac{2m}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2m\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\alpha}}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}m\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\beta}$.

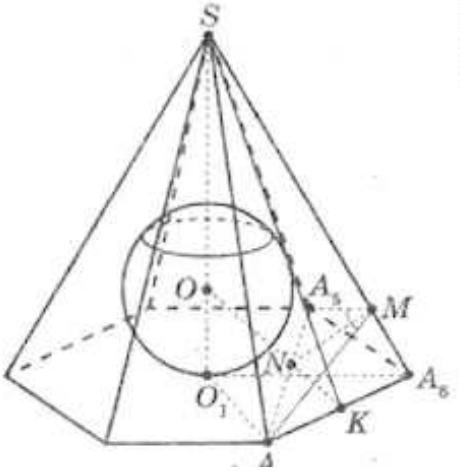
Відповідь: $\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}m\sqrt{4+3\operatorname{tg}^2\beta}$.

3) Розглянемо правильну піраміду $A_1\ldots A_6S$.
a — сторона основи, $NM \perp A_6S$, $\angle A_1MA_3 = \sigma$.
SK — апофема, $\angle O_1KS = \alpha$.

ΔOO_1K: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{OO_1}{O_1K} = \frac{2R}{a\sqrt{3}}$; $R = \frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}$.

Враховуючи перехід між кутами правильної шестикутної піраміди:

$\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}$.



alldz.net

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{1-\sqrt{1-2\cos^2\frac{\delta}{2}}}{\sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}}.$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}}\left(1-\sqrt{1-2\cos^2\frac{\delta}{2}}\right)=\frac{a\sqrt{6}}{4\cos\frac{\delta}{2}}\left(1-\sqrt{1-2\cos^2\frac{\delta}{2}}\right)=\frac{a\sqrt{6}}{4\cos\frac{\delta}{2}}\left(1-\sqrt{-\cos\delta}\right).$$

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{6}}{4\cos\frac{\delta}{2}}\left(1-\sqrt{-\cos\delta}\right)$.

4) Розглянемо правильну піраміду $A_1...A_6S$. $A_6S=A_1S=b$; $\angle A_1SA_6=\gamma$. Позначимо M — точки дотику вписаної сфери до бічної грані піраміди, а $\angle SKO_1=\alpha$. SK — апофема.

ΔOMS: $\sin\angle OSM=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha=\dfrac{R}{H-R}$; $R=\dfrac{H\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

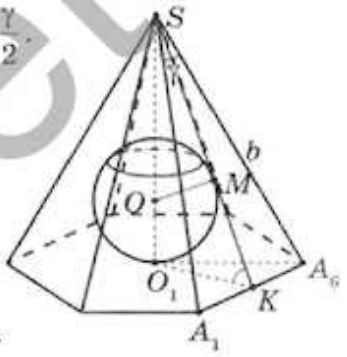
ΔSO_1K: $\sin\alpha=\dfrac{H}{SK}$; $SK=\dfrac{H}{\sin\alpha}$. ΔSKA_1: $\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{SK}{b}$; $SK=b\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

Порівнюючи SK, маємо: $\dfrac{H}{\sin\alpha}=b\cos\dfrac{\gamma}{2}$; $H=b\sin\alpha\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

$$R=\frac{b\sin\alpha\cos\alpha\cos\frac{\gamma}{2}}{1+\cos\alpha}.$$

Враховуючи, що $\cos\alpha=\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$; $\sin\alpha=\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\dfrac{\gamma}{2}}$

і $R=\dfrac{b\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}\cdot\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{b\sqrt{3}\sin\frac{\gamma}{2}}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$.

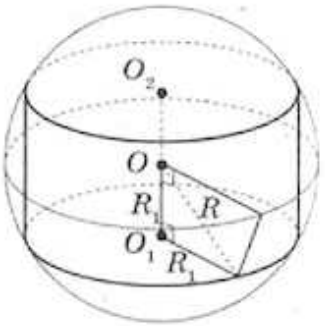


Відповідь: $\dfrac{b\sqrt{3}\sin\frac{\gamma}{2}}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$.

46. Розглянемо циліндр з центрами основ O_1 і O_2 і радіусом R_1, вписаний у сферу $(O; R)$. Оскільки циліндр рівносторонній, то його $H=O_1O_2=2R_1$; $OO_1=R_1$;

$$R^2=2R_1^2;\quad \frac{S_{\text{вписаної сф.}}}{S_{\text{осн}}}=\left(\frac{R}{R_1}\right)^2=\frac{2R_1^2}{R_1^2}=2.$$

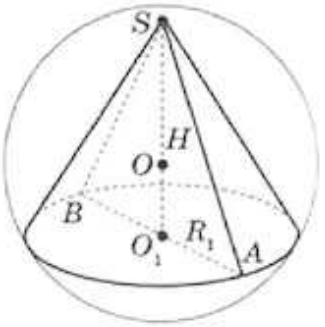
Відповідь: у 2 рази.



47. 1) Розглянемо конус з вершиною S і центром основи O_1, вписаний у сферу $(O; R)$.
Радіус описаної сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо діагонального перерізу ABS. Конус рівносторонній ($AB=AS=BS=3$ дм).

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\ \text{дм}.$$

Відповідь: $\sqrt{3}$ дм.



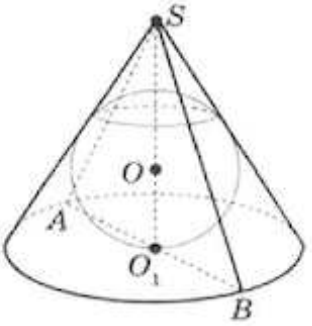
aldz.net

2) Радіус сфери, вписаної в конус, дорівнює радіусу кола, вписаного в діагональний переріз ABS.

$AB = BS = AS = 3$ дм.

Отже, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ дм.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм.



48. 1) Аналогічно до задачі № 47 (2): $a = l$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$a = 2\sqrt{3}r$; $r = 1$ дм; $l = 2\sqrt{3}$ дм.

Відповідь: $2\sqrt{3}$ дм.

2) Аналогічно до задачі 47 (1): $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $a = R\sqrt{3}$; $D = 4$ м; $R = 2$ м;

$a = 2\sqrt{3}$ м; $l = a = 2\sqrt{3}$ м.

Відповідь: $2\sqrt{3}$ м.

49. Розглянемо діагональний переріз. Маємо коло радіуса R, яке вписано в квадрат зі стороною a й описане навколо правильного трикутника зі стороною b.

У циліндрі: $S_{\text{бічн.}} = 2\pi rH$, де $r = \frac{a}{2}$; $H = a$. $a = 2R$,

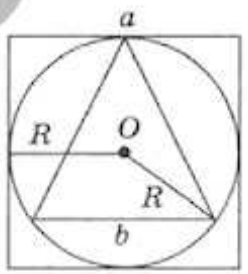
тому $r = R$, $H = 2R$, $S_{\text{бічн}} = 4\pi R^2$.

У конусі: $S_{\text{бічн.}} = \pi rl$, де $r = \frac{b}{2}$; $l = b$.

$b = R\sqrt{3}$, тому $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $l = R\sqrt{3}$; $S_{\text{бічн}} = \frac{3\pi R^2}{2}$.

Маємо: $\frac{S_{\text{бічн. цил.}}}{S_{\text{бічн. кон.}}} = \frac{4\pi R^2}{\frac{3\pi R^2}{2}} = \frac{8}{3}$.

Відповідь: 8 : 3.



50. У діагональному перерізі маємо коло $(O; R)$, вписане в рівносторонній трикутник і описане навколо квадрата.

Позначимо сторону трикутника b, а сторону квадрата — a, тоді $S_{\text{бічн. кон.}} = \pi rl$, $l = b$,

$r = \frac{b}{2}$; $b = 2R\sqrt{3}$; $l = 2R\sqrt{3}$; $r = R\sqrt{3}$;

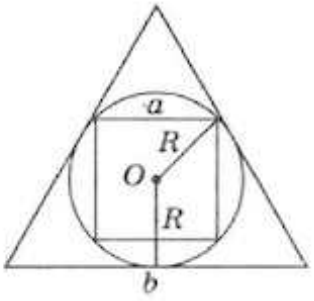
$S_{\text{бічн. кон.}} = 6\pi R^2$.

1) $S_{\text{бічн. цил.}} = 2\pi rH$, $r = \frac{a}{2}$; $H = a$; $a = R\sqrt{2}$,

тоді $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$: $H = R\sqrt{2}$; $S_{\text{бічн. цил.}} = 2\pi R^2$.

$\frac{S_{\text{бічн. кон.}}}{S_{\text{бічн. цил.}}} = \frac{6\pi R^2}{2\pi R^2} = 3$.

Відповідь: 3.



2) $S_{\text{повн. цил.}} = S_{\text{бічн. цил.}} + 2\pi r^2 = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$. $\frac{S_{\text{бічн. кон.}}}{S_{\text{цил.}}} = \frac{6\pi R^2}{3\pi R^2} = 2$.

Відповідь: 2.

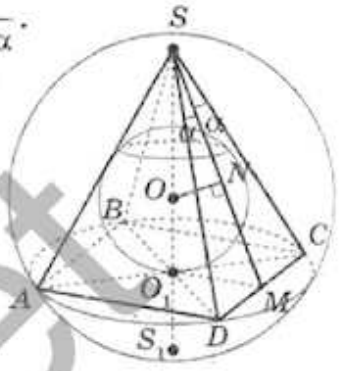
aldz.net

51. Для того, щоб у піраміду можна було вписати сферу, необхідно, щоб в основу піраміди можна було вписати коло, а це коло і є основою конуса, вписаного в піраміду. Основа висоти піраміди і є центром цього кола.

52. Для того, щоб у призму можна було вписати сферу, необхідно і достатньо, щоб у перпендикулярний переріз призми можна було вписати коло і щоб висота призми дорівнювала діаметру цього кола. Оскільки у вписаний у призму циліндр вписали сферу, то його висота дорівнює діаметру сфери. $H_{\text{прав.}} = H_{\text{цил.}}$.

53. Розглянемо $ABCDS$ — правильну піраміду, навколо якої описана сфера з радіусом R і вписана сфера з радіусом r.

$R = 6r$. SM — апофема. N — точка дотику вписаної сфери до бічної грані, $ON \perp SM$. Позначимо через a — сторону основи, а через H — висоту піраміди.



$\angle DSC = 2\alpha$ — шуканий. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{DM}{SM} = \dfrac{a}{2SM}$; $SM = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

ΔSO_1M: $SO_1^2 + O_1M^2 = SM^2$; $H^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$;

$a^2 = \dfrac{4H^2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Продовжимо висоту піраміди до перетину зі сферою S_1. Маємо:

$CO_1^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$. $\dfrac{a^2}{2} = H(2R - H)$;

$\dfrac{2H^2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = H(2R - H)$; $2R = \dfrac{2H\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} + H$; $R = H\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}$.

$\Delta SNO \sim \Delta SO_1M$ (за гострим кутом). $\dfrac{ON}{OS} = \dfrac{O_1M}{SM}$; $\dfrac{r}{H-r} = \dfrac{a \cdot 2\operatorname{tg}\alpha}{2 \cdot a}$;

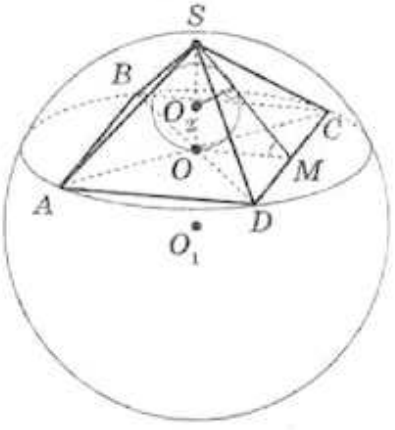
$r = \operatorname{tg}\alpha(H - r)$; $r(1 + \operatorname{tg}\alpha) = H\operatorname{tg}\alpha$; $r = \dfrac{H\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

Враховуючи, що $R = 6r$, маємо $H\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)} = \dfrac{6H\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

54. Розглянемо правильну піраміду $ABCDS$. Сфери $(O_1; r)$ і $(O_2; R)$ відповідно вписана й описана навколо піраміди. Позначимо O — центр основи піраміди, тоді за умовою O — середина відрізка O_1O_2. Нехай x — величина двогранного кута при основі, a — сторона основи, тоді з ΔO_1OK: $r = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, а $H = OS = \dfrac{a\operatorname{tg}x}{2}$.

ΔSOD: $SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\operatorname{tg}x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2x + 2}$.

Проведемо діаметр SS_1. ΔSDS_1 ($\angle SDS_1 = 90°$): $SD^2 = SO \cdot SS_1$.



$\dfrac{a^2}{4}(\operatorname{tg}^2x + 2) = \dfrac{a\operatorname{tg}x}{2} \cdot 2R$; $R = \dfrac{a(\operatorname{tg}^2x + 2)}{4\operatorname{tg}x}$.

Оскільки центри сфер симетричні відносно площини основи, то $O_2O = O_1O = r$.

ΔO_2OD: $O_2O^2 + OD^2 = O_2D^2$ або

$r^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2$; $\dfrac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2(\operatorname{tg}^2x + 2)^2}{16\operatorname{tg}^2x}$;

$\operatorname{tg}^2x\left(4\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} + 8\right) = (\operatorname{tg}^2x + 2)^2$.

ald.net

304 ..... PAGINATION IN THE ARGUMENT .....

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо $x = \operatorname{arctg}\dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$.

Зробимо заміну: $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$; $\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$.

§ 22. Поняття площі й об'єму. Об'єм прямокутного паралелепіпеда

$V = a^3$ — об'єм куба з ребром a.
$V = abc$ — об'єм прямокутного паралелепіпеда, де a, b, c — його виміри.
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, d — діагональ паралелепіпеда.
$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$.

Завдання 19

1. Довжина $a \approx 10$ м. Ширина $b \approx 5$ м. Висота $c \approx 3{,}5$ м.
Тому $V \approx 10 \cdot 5 \cdot 3{,}5 = 175$ м^3.
Відповідь: 175 м^3.

2. $V_{\text{цегл.}} = 20 \cdot 10 \cdot 5 = 1000$ см^3 $= 10^3$ см^3.
$V_{\text{конт.}} = 200 \cdot 200 \cdot 100 = 4 \cdot 10^6$ см^3.
$V_{\text{всіх цегл.}} = 13\,000 \cdot 10^3 = 13 \cdot 10^6$ см^3.
$h = 13 \cdot 10^6 : (4 \cdot 10^6) = 3\dfrac{1}{4}$.
Відповідь: 4 контейнери.

3. $V = 1$ м $\cdot\ 0{,}5$ м $\cdot\ 1{,}5$ м $= 10$ дм $\cdot\ 5$ дм $\cdot\ 15$ дм $= 750$ дм^3.
Відповідь: 750 л.

4. $V_{\text{ніш.}} = 5$ м $\cdot\ 6$ м $\cdot\ 3$ м $= 90$ м^3. 90 м^3 : 5 м^3 = 18 дітлахів.
Відповідь: 18 дітлахів.

5. $V_1 = S_{\text{осн.}} \cdot H$; $V_2 = S_{\text{осн.}} \cdot 1{,}5H$. $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{S_{\text{осн.}} \cdot 1{,}5H}{S_{\text{осн.}} \cdot H} = 1{,}5$; $m_2 = 5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$ кг.
Відповідь: 7,5 кг.

6. $V_1 = a \cdot b \cdot c = abc = 120$ см^3. $V_2 = a \cdot 1{,}5b \cdot \dfrac{c}{3} = \dfrac{abc}{2} = \dfrac{120}{2} = 60$ м^3.
Відповідь: 60 м^3.

7. $S_{б.1} = P_{\text{осн.}1} \cdot H$; $S_{б.2} = P_{\text{осн.}2} \cdot H$.
Якщо $S_1 = S_2$, то $P_1 = P_2$. Отже, якщо сума двох сусідніх сторін однакова, то і бічні поверхні однакові.
Відповідь: так.

8. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, d — діагональ призми.
$\begin{cases} d^2 = 2a^2 + c^2, \\ d_1^2 = a^2 + c^2, \end{cases}$ d_1 — діагональ бічної грані.
$d^2 - d_1^2 = a^2$; $5^2 - 4^2 = a^2$; $a = 3$ см. $c = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ см. $V = a^2 c = 9\sqrt{7}$ см^3.
Відповідь: $9\sqrt{7}$ см^3.

9. Нехай $a_1 = 2x$, а $a_2 = 5x$. $V_1 = a_1^3 = 8x^3$; $V_2 = a_2^3 = 125x^3$. $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^3 = \dfrac{8}{125}$.
Відповідь: 8 : 125.

aldz.net

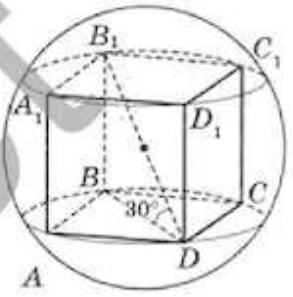
10. Нехай a м — ребро початкового куба, тоді $V_1 = a^3$ м^3.
Після зміни його ребра дорівнюватимуть $(a + 2)$ м, $(a - 2)$ м, a м, тоді $V_2 = (a + 2)(a - 2)a$ м^3, що за умовою задачі на 16 м^3 менше за V_1.
Отже, $-(a + 2)(a - 2)a + a^3 = 16$; $a^3 - a^3 + 4a = 16$; $4a = 16$; $a = 4$ м.
Відповідь: 4 м.

11. 1) Якщо кожне ребро поділити навпіл площиною, яка йому перпендикулярна, то куб поділиться на 8 рівновеликих кубів.
2) Будь-яке ребро куба треба поділити на 5 рівних частин площиною, перпендикулярною цьому ребру.

12. $S_1 = 2$ м^2; $S_2 = 3$ м^2; $S_3 = 6$ м^2.
$S_1 = ab$; $S_2 = bc$; $S_3 = ac$.
$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = (abc)^2$; $V = abc = \sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$; $V = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = 6$ м^3.
Відповідь: 6 м^3.

13. $S_1 = ab$; $S_2 = bc$; $S_3 = ac$. $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = (abc)^2 = V^2$. $V = \sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$.
Відповідь: $V = \sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$.

14. Розглянемо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильну призму, вписану в сферу $(O; R)$.
Центр сфери є серединою діагоналі призми, тому $B_1D = 2R$.
ΔB_1BD: $BB_1 = R$ (як катет, який лежить проти кута 30°).
$ABCD$ — квадрат з діагоналлю $BD = B_1D \cdot \cos 30° = R\sqrt{3}$,



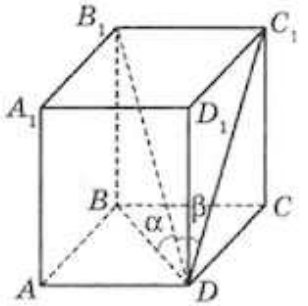
тому його сторона дорівнює $\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$$V = abc = R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3R^3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3R^3}{2}$.

15. Якщо в прямокутний паралелепіпед вписано сферу, то це куб. Оскільки радіус сфери R, то ребро куба $2R$. $V = (2R)^3 = 8R^3$.
Відповідь: $8R^3$.

16. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна призма.
$\angle B_1DB = \alpha$ — кут нахилу діагоналі d до площини основи. $\sin \alpha = m$. Нехай сторони основи дорівнюють a, а висота призми h, тоді



$m = \frac{h}{d}$; $h = dm$; $a^2 + a^2 + h^2 = d^2$;
$2a^2 = d^2 - h^2 = d^2 - d^2m^2$;
$a^2 = \frac{d^2(1 - m^2)}{2}$; $V = a \cdot a \cdot h = a^2h = \frac{d^3m(1 - m^2)}{2}$.
Відповідь: $\frac{d^3m(1 - m^2)}{2}$.

2) $\angle B_1DC_1 = \beta$ — кут нахилу діагоналі призми до площини бічної грані.
$\sin \beta = n$. $n = \frac{B_1C_1}{B_1D} = \frac{a}{d}$; $a = dn$.
$2a^2 + h^2 = d^2$; $h^2 = d^2 - 2a^2 = d^2 - 2d^2n^2 = d^2(1 - 2n^2)$;
$h = d\sqrt{1 - 2n^2}$; $V = a^2h = d^3n^2\sqrt{1 - 2n^2}$.
Відповідь: $d^3n^2\sqrt{1 - 2n^2}$.

aldz.net

§ 23. Об'єм прямої призми

$V = S_{осн.} \cdot H$ — об'єм призми.	$S_{осн.}$ — площа основи;
$V = \pi R^2 \cdot H$ — об'єм циліндра.	H — висота;
$V = S_{осн.} \cdot H$ — об'єм похилого паралелепіпеда.	R — радіус основи;
$V = S_{\perp} \cdot l$ — об'єм похилої призми.	$S_{\perp}$ — площа перпендикулярного перерізу;
	l — довжина бічного ребра.

ПОЯСНЕННЯ

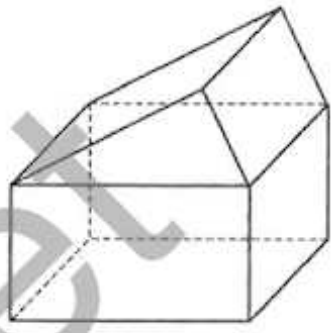
Завдання 20

1. Об'єм циліндра = $\pi R^2 H$. За допомогою прута можна виміряти H і R циліндра.

2. Сарай можна розглядати, як прямокутний паралелепіпед з основою $12 \times 7{,}5$ м і висотою 6 м і призму, в основі якої лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою 12 м і висотою 7,5 м, або з гіпотенузою 7,5 м і висотою 12 м.

$V_{п.п.} = 12 \cdot 7{,}5 \cdot 6 = 540$ м³.

Якщо гіпотенуза рівнобедреного трикутника дорівнює c, то його площа $S = \frac{c^2}{4}$.



$V_{пр.} = \frac{12^2}{4} \cdot 7{,}5 = 270$ м³ або $V_{пр.} = \frac{7{,}5^2}{4} \cdot 12 = 168{,}75$ м³.

$V = 540 + 270 = 810$ м³ або

$V = 540 + 168{,}75 = 708{,}75$ м³.

Відповідь: 810 м³ або 708,75 м³.

3. Якщо створити математичну модель задачі, то маємо пряму призму, в основі якої лежить трапеція. $V_{пр.} = 2{,}8$ м³, $H_{пр.} = v \cdot t = 1{,}25$ м. Треба знайти висоту трапеції. $S_{осн.} = V_{осн.} : H_{пр.} = 2{,}8$ м³ : 1,25 м = 2,24 м². Позначимо h висоту трапеції, тоді її більша основа дорівнює $2 + 2h$, $S_{осн.} = \frac{2 + 2h + 2}{2} \cdot h = 2{,}24$;

$h = -1 \pm 1{,}8$; $h = 0{,}8$; $h = -2{,}8$ не задовольняє умову.

Відповідь: 0,8 м.

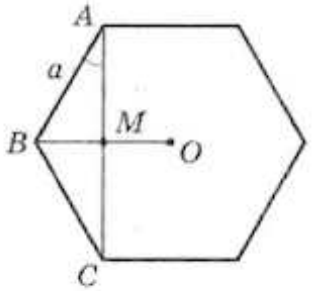
4. $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot H$. Основа — рівносторонній трикутник зі стороною $a = 2$ м, $H = 2$ м.

$S_{ос.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ м². $V = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$ м³.

Відповідь: $2\sqrt{3}$ м³.

5. Одна паркетна плитка має форму правильної шестикутної призми з висотою 13 мм. Відстань між паралельними сторонами — це менша діагональ шестикутника.

$AC = 150$ мм, $AM = 75$ мм, $\angle BAC = 30°$.



$\cos \angle BAC = \frac{AM}{AB}$; $AB = \frac{AM}{\cos 30°} = \frac{75 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$ мм.

$S_{шест.} = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 2500 \cdot 3\sqrt{3} = 11\,250\sqrt{3}$ мм².

$V_{пр.} = S_{осн.} \cdot H = 146\,250\sqrt{3}$ мм³ $= 146{,}25\sqrt{3}$ см³.

$m = \rho V$; $m = 307{,}125\sqrt{3}$ г ≈ 532 г. $M = 1000m = 532$ кг.

Відповідь: 532 кг.

6. $V = S_{осн.} \cdot H$. Основа — правильний шестикутник зі стороною 10 дм.

$S_{осн.} = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 10^2\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$ дм². $V = 150\sqrt{3} \cdot 10 = 1500\sqrt{3}$ дм³.

Відповідь: $1500\sqrt{3}$ дм³.

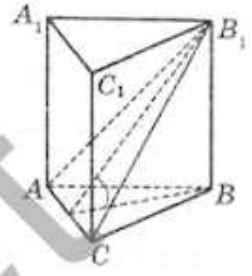
alds.net

7. $V = S_{осн.} \cdot H$, $S_{пов.} = P_{осн.} \cdot H + 2S_{осн.}$.
$S_{осн.} = a^2 \sin\alpha = 25 \sin 30° = 12{,}5$ см^2.
$V = 12{,}5 \cdot 10 = 125$ см^3. $P_{осн.} = 4a = 20$ см.
$S_{пов.} = 20 \cdot 10 + 2 \cdot 12{,}5 = 200 + 25 = 225$ см^2.
Відповідь: 225 см^2, 125 см^3.

8. Якщо діагональний переріз — квадрат площі Q, то $H = \sqrt{Q}$ і діагональ основи дорівнює $\sqrt{Q}$, а площа основи $\frac{Q}{2}$. Отже, $V = S_{осн.} \cdot H = \frac{Q\sqrt{Q}}{2}$.

Відповідь: $\frac{Q\sqrt{Q}}{2}$.

9. $ABCA_1B_1C_1$ — правильна призма.



$V = S_{осн} \cdot H$; $S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$ дм^2.

$\angle B_1MB = 45°$, BM — медіана.
ΔMBB_1 — прямокутний з кутом 45°, отже, він рівнобедрений.

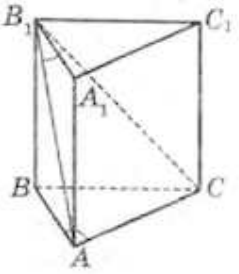
$BB_1 = MB = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ дм.

$V = 16\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 192$ дм^3.

Відповідь: 192 дм^3.

10. 1) $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма.
$\angle A = 120°$, тому в ΔABC сторона BC — найбільша, а з бічних граней BB_1C_1C має найбільшу площу. $V = S_{осн.} \cdot H = S_{ABC} \cdot CC_1$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \sin 120° = \frac{15}{2} \sin 60° = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ см^2.



За теоремою косинусів: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\angle A$;
$BC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120° = 25 + 9 + 30 \cos 60° = 49$.
$BC = 7$ см.
$H = S_{BB_1C_1C} : BC = 35 : 7 = 5$ см.

Маємо $V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ см^3.

Відповідь: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см^3.

2) $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма. $\angle AB_1C = 60°$, $AB_1 = 3$ дм, $CB_1 = 2$ дм, $\angle ABC = 90°$.
За теоремою косинусів: $AC^2 = AB_1^2 + CB_1^2 - 2AB_1 \cdot CB_1 \cos\angle AB_1C$;
$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos 60° = 9 + 4 - 6 = 7$.
$BB_1 = H$ — висота піраміди, тоді:
$AB^2 = AB_1^2 - BB_1^2 = 9 - H^2$; $BC^2 = B_1C^2 - BB_1^2 = 4 - H^2$.
З ΔABC: $9 - H^2 + 4 - H^2 = 7$; $H = \sqrt{3}$.

$AB = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$; $BC = \sqrt{4-3} = 1$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ см^2.

$V = S_{ABC} \cdot H = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ см^3.

Відповідь: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см^3.

aldz.net

11. $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма. $AB = BC = 10$; $AC = 12$; $\angle B_1CB = 60°$.

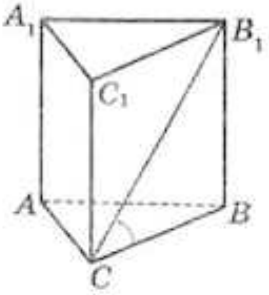
$V = S_{ABC} \cdot BB_1$. За формулою Герона

$S_{ABC} = \sqrt{16(16-10)^2(16-12)} = 48$ кв. од.

$\operatorname{tg} \angle B_1CB = \dfrac{BB_1}{BC}$; $BB_1 = BC \operatorname{tg} 60° = 10\sqrt{3}$ од.

$V = 48 \cdot 10\sqrt{3} = 480\sqrt{3}$ куб. од.

Відповідь: $480\sqrt{3}$ куб. од.



12. Див. рис. до № 11. $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма.

$S_{AA_1C_1C} = 3$ см^2; $S_{CC_1B_1B} = 4$ см^2; $\angle ACB = 30°$; $CC_1 = 1$ см.

$AC = 3$ см^2 : 1 см = 3 см; $BC = 4$ см^2 : 1 см = 4 см. $V = S_{ABC} \cdot CC_1$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC \sin \angle C = 3$ см^2. $V = 3$ см^2 $\cdot$ 1 см = 3 см^3.

Відповідь: 3 см^3.

13. $A_1A_2A_3 \ldots B_5B_6$ — правильна призма. $B_2A_5 = 35$ дм, $B_2A_4 = 31$ дм.

Позначимо сторону основи a, а висоту H, тоді

$A_2A_5 = 2a$, $A_2A_4 = a\sqrt{3}$.

$\Delta B_2A_2B_5$: $B_2A_2^2 + A_2A_5^2 = B_2A_5^2$; $H^2 + 4a^2 = 1225$.

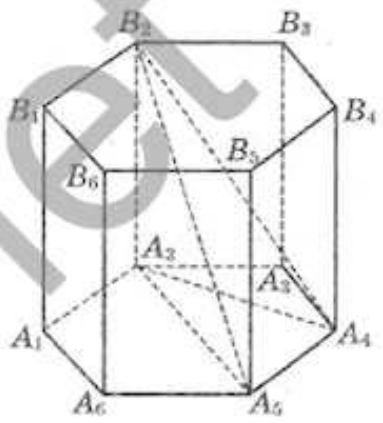
$\Delta B_1A_2A_4$: $B_2A_2^2 + A_2A_4^2 = B_2A_4^2$; $H^2 + 3a^2 = 961$.

Звідси $a^2 = 264$; $H = 13$ дм.

$V = S_{осн.} \cdot H$; $S_{осн.} = \dfrac{3}{2} a^2\sqrt{3} = 396\sqrt{3}$ дм^2.

$V = 396\sqrt{3} \cdot 13 = 5148\sqrt{3}$ дм^3.

Відповідь: $5148\sqrt{3}$ дм^3.



14. Розглянемо пряму трикутну призму.

Площі бічних граней $S_1 = 40$ см^2, $S_2 = 68$ см^2, $S_3 = 84$ см^2.

$S_1 = aH$, $S_2 = bH$, $S_3 = cH$, отже, $a : b : c = 10 : 17 : 21$.

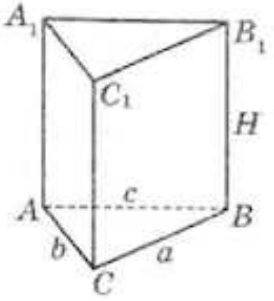
Позначимо $a = 10x$, $b = 17x$, $c = 21x$.

Тоді $S_{осн.} = \sqrt{24x \cdot 14x \cdot 7x \cdot 3x} = 84x^2$, що за умовою задачі дорівнює 21 см^2, тому $x = 0{,}5$.

Маємо $a = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ см, $H = 40 : 5 = 8$ см.

$V = S_{осн.} \cdot H = 21 \cdot 8 = 168$ см^3.

Відповідь: 168 см^3.



15. Див. рис. до завдання 13. Розглянемо правильну шестикутну призму.

$A_2B_2B_1A_1$ — квадрат, тому $H = a\sqrt{3}$.

$\Delta B_2A_2A_5$: $H^2 + 4a^2 = 14^2$; $3a^2 + 4a^2 = 196$; $a^2 = \dfrac{196}{7} = 28$; $a = 2\sqrt{7}$; $H = 2\sqrt{21}$.

$S_{осн.} = \dfrac{3}{2} a^2\sqrt{3} = 42\sqrt{3}$ дм^2; $V = 42\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{21} = 252\sqrt{7}$ дм^3.

Відповідь: $252\sqrt{7}$ дм^3.

16. Площа основи правильної шестикутної призми $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} a^2$, звідки

$\sqrt{2S\sqrt{3}}$

alez.net

$a = \frac{\quad}{3}$, a — сторона основи.

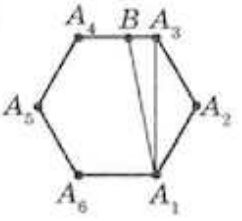
Площа бічної поверхні $Q = 6aH$, звідки

$H = \dfrac{Q}{2\sqrt{2S\sqrt{3}}}$. $V = SH = \dfrac{QS}{2\sqrt{2S\sqrt{3}}} = \dfrac{Q}{2}\sqrt{\dfrac{S}{2\sqrt{3}}}$.

Відповідь: $\dfrac{Q}{2}\sqrt{\dfrac{S}{2\sqrt{3}}}$.

17. Площина, яка проходить через бічне ребро правильної шестикутної призми, поділила її на дві призми з однаковими висотами, отже, $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_1 H}{S_2 H} = \dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{S_{A_1A_2A_3B}}{S_{BA_4A_5A_6A_1}} = \dfrac{1}{3}$. Якщо сторона правильного шестикутника a, то



$S_{\text{шест.}} = \dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, а $S_{A_1A_2A_3B} = \dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3} : 4 = \dfrac{3}{8}a^2\sqrt{3}$.

$S_{A_1A_2A_3B} = S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3B}$, де $S_{A_1A_2A_3} = \dfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Розглянемо ΔA_1A_3B: $\angle A_3 = 120° - 30° = 90°$. $A_1A_3 = a\sqrt{3}$,

$A_3B = \dfrac{2S_{A_1A_3B}}{A_1A_3}$; $S_{A_1A_3B} = \dfrac{3}{8}a^2\sqrt{3} - \dfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \dfrac{1}{8}a^2\sqrt{3}$. $A_3B = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{8a\sqrt{3}} = \dfrac{a}{4}$.

За теоремою Піфагора: $A_1B = \sqrt{A_3B^2 + A_1A_3^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{16} + 3a^2} = \dfrac{7}{4}a$.

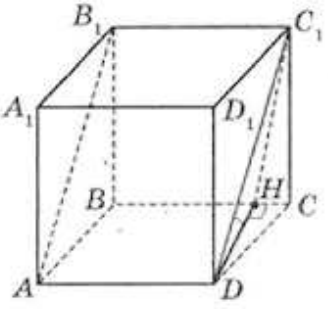
Маємо: $S_{\text{бічн.}} = aH = Q$; $H = \dfrac{Q}{a}$. $S_{\text{пер}} = \dfrac{7}{4}a \cdot H = \dfrac{7}{4}a \cdot \dfrac{Q}{a} = \dfrac{7}{4}Q$.

Відповідь: $\dfrac{7}{4}Q$.

18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — пряма призма.

$ABCD$ — паралелограм, $AD = a$. $S_{AB_1C_1D} = S$.

$\angle C_1DH = \beta$, DH — висота паралелограма.



$V = S_{ABCD} \cdot CC_1$; $S_{ABCD} = S\cos\beta$.

$DC_1 = \dfrac{S}{a}$; $\sin\beta = \dfrac{aH}{S}$; $H = \dfrac{S\sin\beta}{a}$.

$V = \dfrac{S^2\sin\beta\cos\beta}{a} = \dfrac{S^2\sin 2\beta}{2a}$.

Відповідь: $\dfrac{S^2\sin 2\beta}{2a}$.

19. В основі прямої призми лежить рівнобедрений прямокутний трикутник.

Нехай його катети дорівнюють a, а гіпотенуза $b = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ м, тоді $2a^2 = b^2$;

$a = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. $S_{\text{бічн.}} = (2a + b) \cdot H$; $2S_{\text{осн.}} = a^2$. За умовою задачі $(2a + b)H = a^2$;

$H = \dfrac{a^2}{2a + b}$, тоді

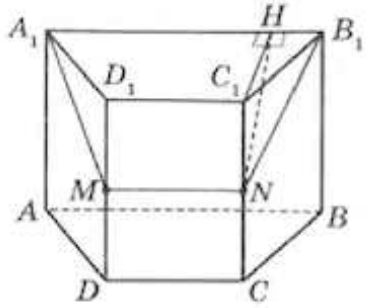
$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{a^2}{2a + b} = \dfrac{a^4}{2(2a + b)} = \dfrac{b^4}{8\left(b\sqrt{2} + b\right)} = \dfrac{b^4}{8b\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \dfrac{b^3}{8\left(\sqrt{2} + 1\right)} =$

$= \dfrac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\right)^3}{8\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \dfrac{1}{8}$ м^3.

Відповідь: $\dfrac{1}{8}$ м^3.

alloz.net

20. Розглянемо пряму призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M, N — середини DD_1 і CC_1 відповідно. Маємо A_1MNB_1 — трапеція з основами 4 см і 8 см і площиною 48 см².



Проведемо $NH \perp A_1B_1$, $\angle C_1HN = 60°$, $C_1N = \dfrac{H}{2}$.

$NH = \dfrac{2S_{A_1B_1NM}}{A_1B_1 + MN} = 8$ см. $\dfrac{H}{2} = NH \cdot \cos 60°$; $H = 8\sqrt{3}$.

$S_{осн.} = S_{A_1MNB_1} \cdot \cos 60° = 24$ см².

$V = S_{осн.} \cdot H = 24 \cdot 8\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$ см³.

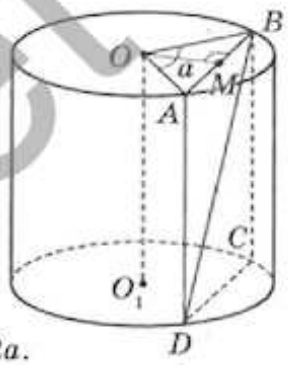
Відповідь: $192\sqrt{3}$ см³.

21. $S_{осн.} = \pi R^2 = Q$. $S_{пер.} = 2RH = S$.

$V = Q \cdot H$; $H = \dfrac{S}{2R}$; $R = \sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$, тому $H = \dfrac{S\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Q}}$. $V = \dfrac{QS\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Q}} = \dfrac{S}{2}\sqrt{Q\pi}$.

Відповідь: $\dfrac{S}{2}\sqrt{Q\pi}$.

22. Розглянемо циліндр з віссю OO_1. $ABCD$ — переріз циліндра, паралельний OO_1.
$\angle AOB = 120°$; M — середина AB (ΔAOB — рівнобедрений).
$OM = a$, $BD = 4a$.



Розглянемо ΔAOB ($AO = OB = R$): $\angle AOM = 120° : 2 = 60°$.

З ΔOMA: $AM = OM \operatorname{tg} 60° = a\sqrt{3}$;

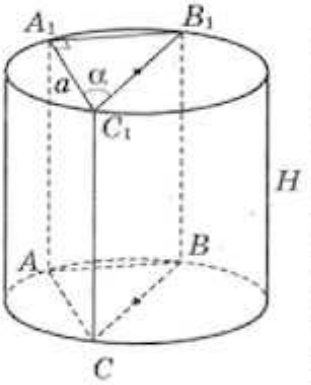
$R = AO = OM : \cos 60° = 2a$; $AB = 2AM = 2a\sqrt{3}$.

ΔDAB: $H^2 = AD^2 = DB^2 - AB^2 = (4a)^2 - \left(2a\sqrt{3}\right)^2 = (2a)^2$; $H = 2a$.

$V = \pi R^2 H$; $V = \pi \cdot (2a)^2 \cdot 2a = 8\pi a^3$.

Відповідь: $8\pi a^3$.

23. Розглянемо циліндр, у який вписана призма. В основі призми лежить прямокутний $\Delta A_1B_1C_1$ ($\angle A_1 = 90°$), вписаний в основу циліндра, тому $R_{ц.} = B_1C_1 : 2$.

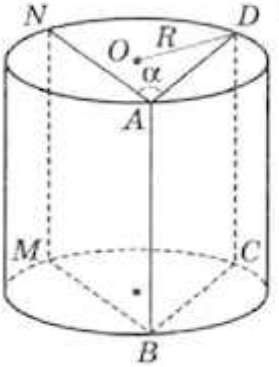


$\Delta A_1B_1C_1$: $\cos\alpha = \dfrac{A_1C_1}{B_1C_1}$; $B_1C_1 = \dfrac{A_1C_1}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$. $R = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$.

$V = \pi R^2 \cdot H = \dfrac{\pi a^2 H}{4\cos^2\alpha}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi a^2 H}{4\cos^2\alpha}$.

24. Розглянемо два перерізи циліндра, які мають спільну твірну AB. $S_{ABMN} = S_{ABCD} = S$, тому $AN = AD$, $\angle NAD = \alpha$. Отже, O — центр основи циліндра, є центром кола, описаного навколо ΔNAD.



Позначимо $AN = AD = a$, $ND = b$, тоді

$R = \dfrac{a^2 b}{4S_\Delta} = \dfrac{a^2 b}{2a^2 \sin\alpha} = \dfrac{b}{2\sin\alpha}$; $b = 2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

$R = \dfrac{2a\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha} = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$; $a = 2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$. $S = aH$,

alnz.net

$$H = \frac{S}{a} = \frac{S}{2R\cos\frac{\alpha}{2}}. \quad V = \pi R^2 \cdot H = \frac{\pi R^2 S}{2R\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi RS}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

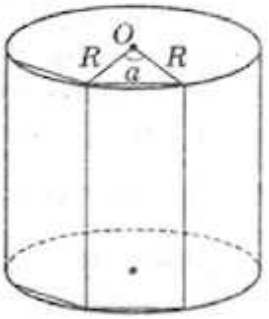
Відповідь: $\frac{\pi RS}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

25. Розглянемо правильну n-кутну призму зі стороною основи a, вписану в циліндр:

$$V_{пр.} = S_{осн.} \cdot H;\ V_{цил.} = \pi R^2 \cdot H. \quad \frac{V_{пр.}}{V_{цил.}} = \frac{S_{осн.\ пр.}}{\pi R^2}.$$

Знайдемо S правильного n-кутника, розбивши його на n рівнобедрених трикутників з бічною стороною R і кутом, який лежить між бічними сторонами $\frac{360^\circ}{n}$, тоді: $S_n = n \cdot S_\Delta$;

$$S_\Delta = \frac{R^2}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}. \quad S_n = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}. \quad \frac{V_{пр.}}{V_{цил.}} = \frac{nR^2\sin\frac{360^\circ}{n}}{2\pi R^2} = \frac{n\sin\frac{360^\circ}{n}}{2\pi}.$$



1) $n = 3$. $\frac{V_{пр.}}{V_{цил.}} = \frac{3\sin\frac{360^\circ}{3}}{2\pi} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

2) $n = 4$. $\frac{V_{пр.}}{V_{цил.}} = \frac{4\sin\frac{360^\circ}{4}}{2\pi} = \frac{4\cdot 1}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$.

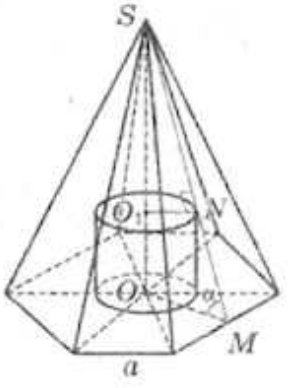
3) $n = 6$. $\frac{V_{пр.}}{V_{цил.}} = \frac{6\sin\frac{360^\circ}{6}}{2\pi} = \frac{6\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

4) $n = 8$. $\frac{V_{пр.}}{V_{цил.}} = \frac{8\sin\frac{360^\circ}{8}}{2\pi} = \frac{8\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

5) $n = k$. $\frac{V_{пр.}}{V_{цил.}} = \frac{k\sin\frac{360^\circ}{k}}{2\pi}$.

Відповідь: 1) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; 2) $\frac{2}{\pi}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; 4) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; 5) $\frac{k\sin\frac{360^\circ}{k}}{2\pi}$.

26. Розглянемо правильну шестикутну піраміду, в яку вписано циліндр. a — сторона основи піраміди, SM — апофема, O — центр шестикутника, $\angle SMO = \alpha$.



Нехай r і h — радіус і висота циліндра, тоді $h = 2r$.

$V = \pi r^2 h = 2\pi r^3$.

N — точка дотику циліндра до бічної грані.

$\angle SNO_1 = 90^\circ$. $\Delta SNO_1 \sim \Delta SOM$.

$\frac{O_1N}{O_1S} = \frac{OM}{SM}$; $\frac{r}{H-h} = \cos\alpha$. H — висота піраміди.

$H = OM \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2}$ (OM — радіус кола, вписаного в правильний шестикутник).

Маємо: $r = \cos\alpha\left(\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2} - 2r\right)$; $r(1+2\cos\alpha) = \frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$; $r = \frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{2(1+2\cos\alpha)}$.

alds.net

$$V = 2\pi r^3 = \frac{2\pi a^3 3\sqrt{3}\sin^3\alpha}{8(1+2\cos\alpha)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3 \frac{\sin^3\alpha}{(1+2\cos\alpha)^3}.$$

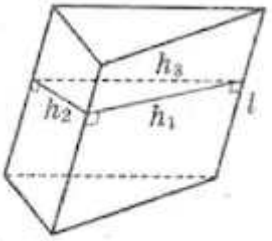
Відповідь: $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3 \frac{\sin^3\alpha}{(1+2\cos\alpha)^3}$.

Об'єм похилої призми дорівнює добутку довжини бічного ребра на площу перпендикулярного перерізу.

27. Розглянемо трикутну призму.

$P_\perp = 90$ см. $S_1 = 450$ см^2; $S_2 = 522$ см^2; $S_3 = 648$ см^2.

Позначимо за l — довжину бічного ребра, а h_1, h_2, h_3 — сторони перпендикулярного перерізу. $h_1 \perp l$, $h_2 \perp l$, $h_3 \perp l$. Тоді $S_1 = h_1 l$; $S_2 = h_2 l$; $S_3 = h_3 l$. $S_1 + S_2 + S_3 = h_1 l + h_2 l + h_3 l = l \cdot P_\perp$; $l = (450 + 522 + 648) : 90 = 18$ см, $h_1 = 25$ см, $h_2 = 29$ см, $h_3 = 36$ см.



$S_\perp = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 360$ см^2. $V = 360 \cdot 18 = 6480$ см^3.

Відповідь: 6480 см^3.

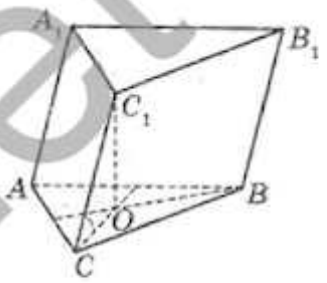
28. Розглянемо похилу трикутну призму.

ΔABC — правильний зі стороною $a = 3\sqrt{3}$.

O — центр кола описаного навколо ΔABC.

$C_1O \perp (ABC)$, тому $C_1O = H$, $\angle C_1CO = 60°$.

$V = S_{осн.} \cdot H = S_{ABC} \cdot C_1O$.



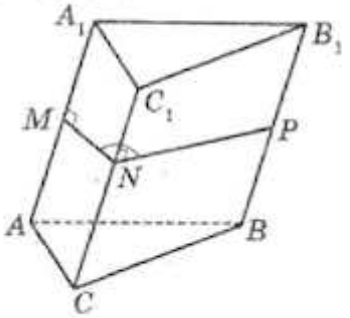
$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(3\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

$H = OC \cdot \operatorname{tg} 60°$; $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 3$; $H = 3\sqrt{3}$. $V = \frac{27\sqrt{3}}{4} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{243}{4}$.

Відповідь: $\frac{243}{4}$.

29. Розглянемо трикутну призму. $S_{CC_1B_1B} = 40$ см^2; $S_{AA_1C_1C} = 30$ см^2; $CC_1 = 10$ см.

$MN \perp CC_1$, $PN \perp CC_1$, тоді MNP — її перпендикулярний переріз, $\angle MNP = 120°$.



$S_{AA_1C_1C} = CC_1 \cdot MN$; $MN = 3$ см.

$S_{CC_1B_1B} = CC_1 \cdot PN$; $PN = 4$ см.

$V = S_\perp \cdot l = S_{MNP} \cdot CC_1$.

$S_{MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot PN \cdot \sin\angle N = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin 120° = 3\sqrt{3}$ см^2.

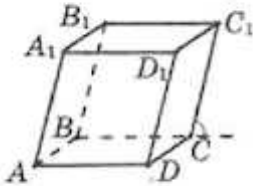
$V = 3\sqrt{3} \cdot 10 = 30\sqrt{3}$ см^3.

Відповідь: $30\sqrt{3}$ см^3.

30. Ці площини перетнуть основи призми по їхніх медіанах. А медіани трикутника перетинаються в одній точці. Отже, ця пряма буде проходити через точки перетину медіан основ призми.

Відповідь: так.

31. В умові не вистачає даних, але якщо вважати, що всі ребра паралелепіпеда рівні між собою, тоді $D_1D \perp DC$ за теоремою про три перпендикуляри ($AD \perp DC$), отже, DCC_1D_1 — квадрат з площею 25 дм^2, тому $a = DC = DD_1 = 5$ дм.

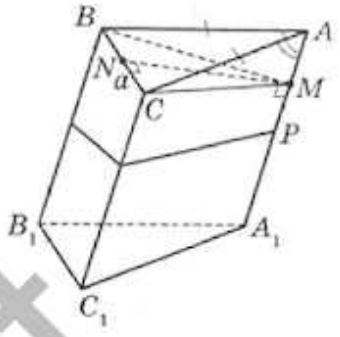


gdz.net

$H = a\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. $V = S_{осн.} \cdot H$; $V = 5^2 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{125\sqrt{3}}{2}$ дм³.

Відповідь: $\dfrac{125\sqrt{3}}{2}$ дм³.

32. Розглянемо похилу призму $ABCA_1B_1C_1$. Проведемо $CM \perp AA_1$, $BM = CM$ (як висоти однакових паралелограмів, проведених до спільної сторони).
ΔBMC — перпендикулярний переріз.
$BC = a$; $BM = CM$; $\angle BMC = 120°$.



$MN \perp BC$; $\angle NMC = \angle BMC : 2 = 60°$; $NC = \dfrac{a}{2}$.

$\operatorname{tg} 60° = \dfrac{a}{2MN}$; $MN = \dfrac{a}{2\operatorname{tg} 60°} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

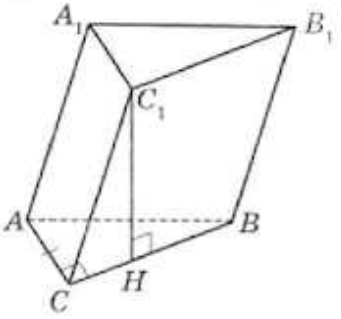
$S_{BMC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot MN = \dfrac{1}{2} a \cdot \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a^2}{4\sqrt{3}}$.

$V = S_{\perp} \cdot l = S_{BMC} \cdot AA_1 = \dfrac{a^2}{4\sqrt{3}} \cdot b = \dfrac{a^2 b\sqrt{3}}{12}$.

Відповідь: $\dfrac{a^2 b\sqrt{3}}{12}$.

33. Розглянемо похилу призму $ABCA_1B_1C_1$. $AC = BC = 7$ см, $\angle ACB = 90°$, $(BCC_1) \perp (ABC)$, $S_{ACC_1A_1} = 49$ см². $\angle C_1CB = 45°$.

Проведемо $C_1H \perp CB$, C_1C — похила, HC — її проекція. $HC \perp AC$, отже, за теоремою про три перпендикуляри $C_1C \perp AC$, тому AA_1C_1C — прямокутник зі стороною 7 см і площею 49 см², тобто це квадрат. Маємо $CC_1 = 7$ см.



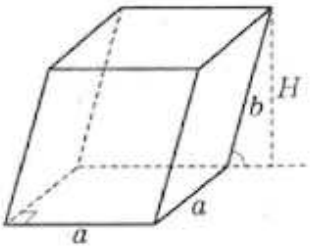
$V = S_{осн.} \cdot C_1H$. $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} AC \cdot CB = \dfrac{49}{2}$ см².

$C_1H = CC_1 \cdot \sin 45° = 7 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ см.

$V = \dfrac{49}{2} \cdot \dfrac{7\sqrt{2}}{2} = \dfrac{243\sqrt{2}}{4}$ см³.

Відповідь: $\dfrac{243\sqrt{2}}{4}$ см³.

34. Розглянемо похилу призму, в основі якої лежить квадрат зі стороною a і бічним ребром b. Тоді добуток ребер одного з тригранних кутів дорівнює a^2b, що за умовою задачі вдвічі більший за $V = a^2H$, де $H = b\sin\alpha$.



Маємо $a^2b = 2a^2b\sin\alpha$; $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\alpha = 30°$.

Відповідь: 30°.

ПОЯСНЕННЯ

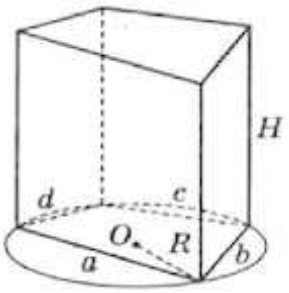
Для вписаного чотирикутника існують такі формули:

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, p — півпериметр.

$R = \dfrac{1}{4S} = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$.

alds.net

35. Розглянемо пряму призму, основою якої є чотирикутник, вписаний у коло $(O; R)$. Позначимо сторони чотирикутника a, b, c, d. Призма пряма, тому бічні грані — прямокутники з однаковою висотою H.



Отже, $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = a : b : c : d$.

Позначимо сторони чотирикутника як $7x$, $15x$, $20x$, $24x$.

Отже, $p = (7x + 15x + 20x + 24x) : 2 = 33x$.

$S = \sqrt{26x \cdot 18x \cdot 13x \cdot 9x} = 234x^2$.

$$R = \frac{1}{4 \cdot 234x^2}\sqrt{(7x \cdot 15x + 20x \cdot 24x)(7x \cdot 20x + 15x \cdot 24x)(7x \cdot 24x + 15x \cdot 20x)} = 12{,}5x,$$

а $12{,}5x = 25$ см, тому $x = 2$ см. $S = 234 \cdot 2^2 = 936$ см^2.

Найбільша грань має розміри $24x$ і H і діагональ 52 см.

Маємо: $H^2 = 52^2 - 48^2 = 400$; $H = 20$. $V = S \cdot H = 936 \cdot 20 = 18\,720$ см^3.

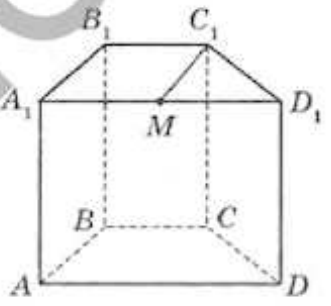
Відповідь: 18 720 см^3.

36. Розглянемо пряму призму, в основі якої лежить трапеція. Призма пряма, тому бічні грані — прямокутники з однаковими висотами H. Отже, сторони трапеції $a : b : c : d = 40 : 300 : 75 : 205 = 8 : 60 : 15 : 41$, причому a і b — основи, c і d — бічні сторони трапеції.

Проведемо $C_1M \parallel A_1B_1$, яка розіб'є трапецію на паралелограм і трикутник з однаковими висотами, рівними висоті трапеції h. Тоді $B_1C_1 = 8x$, $A_1D_1 = 60x$, $A_1B_1 = 41x$, $C_1D_1 = 15x$, де $MD_1 = 60x - 8x = 52x$, $C_1M = A_1B_1 = 41x$.

$S_{\Delta MC_1D_1} = \sqrt{54x \cdot (54x - 41x)(54x - 52x)(54x - 15x)} = 234x^2$

за формулою Герона.



$h = \dfrac{2S_{\Delta MC_1D_1}}{MD_1} = \dfrac{2 \cdot 234x^2}{52x} = 9x.$

Отже, $S_{A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{B_1C_1 + A_1D_1}{2} \cdot h = \dfrac{8x + 60x}{2} \cdot 9x = 306x^2$,

що за умовою задачі дорівнює 306 см^2, тому $x = 1$ і

$H_{\text{пр.}} = S_{C_1D_1DC} : C_1D_1 = 75$ см^2 : 15 см $= 5$ см.

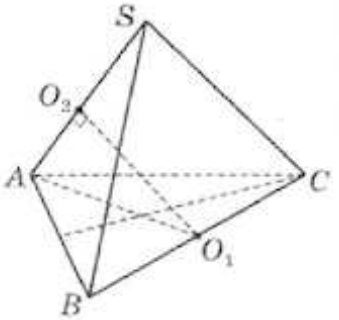
$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = 306$ см$^2 \cdot 5$ см $= 1530$ см^3.

Відповідь: 1530 см^3.

37. Розглянемо циліндр, у якого діаметри основ є ребрами правильного тетраедра. Тоді центри основ циліндра O_1 і O_2 є серединами ребра основи і протилежного бічного ребра. $R = \dfrac{a}{2}$, а висота циліндра $H = O_1O_2$, $O_1O_2 \perp AS$; $O_1O_2 \perp BC$.

ΔAO_2O_1: $H^2 + AO_2^2 = AO_1^2$;

$AO_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (висота правильного трикутника). $AO_2 = \dfrac{a}{2}$.



Маємо: $H^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$; $H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$V_{\text{ц.}} = \pi R^2 H = \pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$.

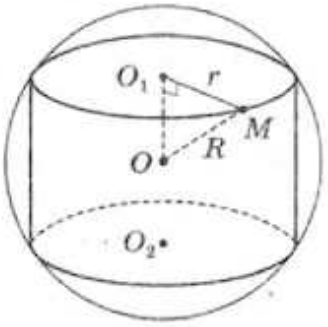
38. Розглянемо циліндр з висотою H і радіусом основи r, вписаний у сферу радіуса R. $V_{\text{ц.}} = \pi r^2 H$.

alex.net

Розглянемо ΔOO_1M (M — точка кола основи циліндра).

32*

$\angle OO_1M = 90°$. $O_1M = r$; $OM = R$; $OO_1 = \frac{H}{2}$.



Маємо: $r^2 = R^2 - \frac{H^2}{4}$, тоді $V = \pi H\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right)$.

R — const. $H \in (O; 2R)$.

$V'(H) = \pi\left(R^2 - \frac{H^2}{4} - \frac{H^2}{2}\right) = \pi\left(R^2 - \frac{3H^2}{4}\right)$; $V'(H) = 0$;

$R^2 - \frac{3H^2}{4} = 0$; $H = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$.

$V(0) = 0$; $V(2R) = 0$; $V\left(\frac{2}{3}R\sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$ — найбільший.

Отже, $R = \frac{H\sqrt{3}}{2}$. $r^2 = \left(\frac{H\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{H^2}{4}$; $r^2 = \frac{H^2}{2}$; $H = r\sqrt{2}$.

Відповідь: $H = r\sqrt{2}$.

§ 24. Об'єми піраміди та конуса

ПОЯСНЕННЯ

$V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$ — об'єм піраміди;

$V = \frac{1}{3}\left(S_0 + S_1 + \sqrt{S_0S_1}\right)H$ — об'єм зрізаної піраміди;

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ — об'єм конуса;

$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$ — об'єм зрізаного конуса.

Завдання 21

1. $V = \frac{1}{3}S_{осн.}H$. $S_{осн.} = 5{,}3$ га $= 53\,000$ м². $H = 147$ м.

$V = \frac{1}{3} \cdot 53\,000 \cdot 147 = 2\,597\,000$ м³.

Відповідь: 2 597 000 м³.

2. 1) Нехай a — сторона основи, h — висота, тоді $\frac{a}{h} = \frac{\sqrt{53000}}{147} = 1{,}56$.

2) a — сторона основи, l — бічне ребро. $l^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{a^2}{2} + h^2$.

$l^2 = 26\,500 + 21\,609 = 48\,109$; $l \approx 219$. $\frac{a}{l} \approx \frac{\sqrt{53000}}{219} = 1{,}05$.

3. $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$, $H = 10$ м. $V = \frac{10}{3} \cdot S_{осн.}$.

1) $n = 3$, $S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $V = \frac{5a^2\sqrt{3}}{6}$ м³.

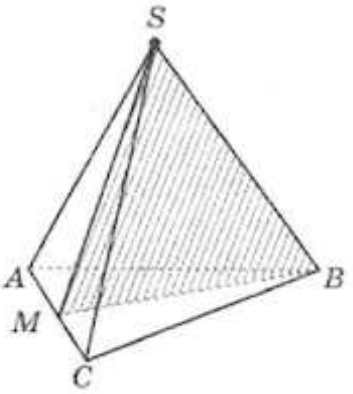
2) $n = 4$, $S_{осн.} = a^2$; $V = \frac{10a^2}{3}$ м³.

alldz.net

3) $n = 6$, $S_{осн.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $V = 5a^2\sqrt{3}$ м^3.

Відповідь: 1) $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{6}$ м^3; 2) $\dfrac{10a^2}{3}$ м^3; 3) $5a^2\sqrt{3}$ м^3.

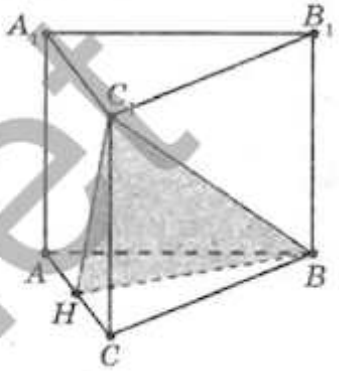
4. Розглянемо $ABCS$ — піраміду. BM — медіана.



$$\frac{V_{BMCS}}{V_{BMAS}} = \frac{\frac{1}{3}S_{MBC}\cdot H}{\frac{1}{3}S_{MBA}\cdot H} = \frac{S_{MBC}}{S_{MBA}} = \frac{\frac{1}{2}MC\cdot h}{\frac{1}{2}MA\cdot h} = \frac{MC}{MA} = 1.$$

H — висота пірамід $ABCS$, $ABMS$, $BMCS$ (однакова для всіх 3-х пірамід).
h — висота трикутників MBC і AMB (однакова).
Відповідь: 1: 1.

5. Розглянемо правильну призму $ABCA_1B_1C_1$. $BH \perp AC$. BHC_1 — переріз призми. Якщо a — сторона основи, а H — висота призми, то



$$V_{ABCA_1B_1C_1} = V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H;$$

$$V_{BCHC_1} = V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}\cdot H;$$

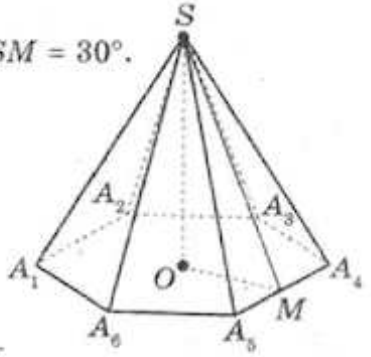
$$V_{AHBA_1C_1B_1} = V_2 = V - V_1 = \frac{a^2\sqrt{3}H}{4}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5a^2\sqrt{3}H}{24};$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^2\sqrt{3}H}{4} : \frac{5a^2\sqrt{3}H}{24} = 1:5.$$

Відповідь: 1 : 5.

6. Якщо піраміди мають спільну основу й однакові об'єми, то вершини цих пірамід повинні знаходитись на однаковій відстані від площини основи, тобто це всі площини, паралельні основі, які знаходяться по різні боки від основи і рівновіддалені від неї.

7. Розглянемо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6S$ — правильну піраміду.
SO — висота піраміди. SM — апофема. $SO = 1$ м, $\angle OSM = 30°$.



$$V = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H.$$

Нехай a — сторона основи, тоді $OM = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

ΔSOM: $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{OM}{OS}$; $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $a = \dfrac{2}{3}$ м.

$$S_{осн.} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 4\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 9} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\text{ м}^2.\quad V = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot 1 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\text{ м}^3.$$

Відповідь: $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ м^3.

8. $V = \dfrac{1}{3}S_{осн.}\cdot H$. Оскільки $\alpha = 45°$, то $H = r$ (радіус кола, вписаного в основу).

1) $n = 3$, $S_{осн.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. $V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{24}$.

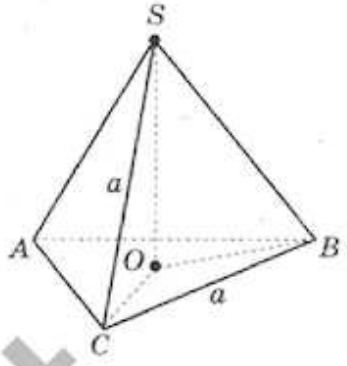
alOz.net

2) $n = 4$, $S_{\text{осн.}} = a^2$; $H = \frac{a}{2}$; $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$.

3) $n = 6$, $S_{\text{осн.}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{4}$.

Відповідь: 1) $\frac{a^3}{24}$; 2) $\frac{a^3}{6}$; 3) $\frac{3a^3}{4}$.

9. $ABCS$ — правильний тетраедр з ребром a.



$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$. $S_{\text{осн.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$H^2 = a^2 - R^2$ (R — радіус кола, описаного навколо основи), $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Відповідь: $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

10. $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$. $S_{\text{осн}} = a^2$; $H^2 = a^2 - R^2$ (R — радіус описаного кола),

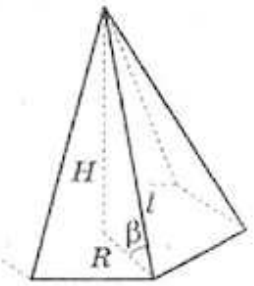
$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Відповідь: $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Задачі 11 і 12 розв'яжемо в іншому порядку. Спочатку виведемо формули для n-кутної піраміди, а потім підставимо $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$.

$V = \frac{1}{3}S_n \cdot H$; $S_n = \frac{1}{2}R^2 \cdot n \sin\frac{360^\circ}{n}$.

12(3) а. $H = l \sin\beta$, $R = l\cos\beta$.



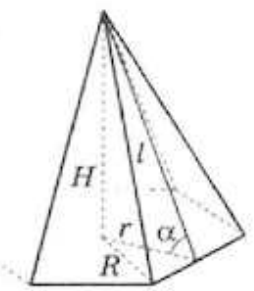
$S_n = \frac{nl^2}{2}\cos^2\beta \sin\frac{360^\circ}{n}$. $V = \frac{nl^3}{6}\sin\beta\cos^2\beta\sin\frac{360^\circ}{n}$.

11(1). $n = 3$. $V = \frac{3l^3}{6}\sin\beta\cos^2\beta\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}l^3\sin\beta\cos^2\beta$.

12(1) а. $n = 4$. $V = \frac{4l^3}{6}\sin\beta\cos^2\beta\sin 90^\circ = \frac{2}{3}l^3\sin\beta\cos^2\beta$.

12(2) а. $n = 6$. $V = \frac{6l^3}{6}\sin\beta\cos^2\beta\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}l^3\sin\beta\cos^2\beta$.

12(3) б. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{r}$, $H = r\operatorname{tg}\alpha$; $r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$; $H = R\cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\alpha$.



$H^2 + R^2 = l^2$/ $R^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}^2\alpha + R^2 = l^2$.

$R^2 = \frac{l^2}{\left(\cos^2\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right)}$; $H = \frac{l\cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\cos^2\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}$;

alg.net

$$V=\frac{1}{6}R^2 n\sin\frac{360^\circ}{n}\cdot\frac{l\cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\cos^2\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}^2\alpha+1}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{l^3 n\sin\frac{360^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\alpha}{\left(\cos^2\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

11(2). $n=3.\ V=\dfrac{3l^3}{6}\cdot\dfrac{\sin 120^\circ\cos 60^\circ\operatorname{tg}\alpha}{\left(\cos^2 60^\circ\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{l^3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^{\frac{3}{2}}}=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}l^3\cdot\frac{4^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}^2\alpha+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}l^3\operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}^2\alpha+4)^{\frac{3}{2}}}.$$

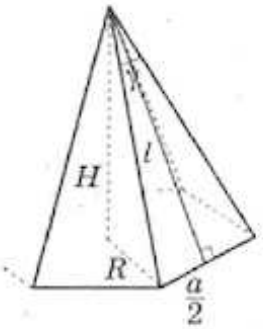
12(1). б. $n=4.\ V=\dfrac{l^3}{6}\cdot\dfrac{\sin 90^\circ\cos 45^\circ\operatorname{tg}\alpha}{\left(\cos^2 45^\circ\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2l^3}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^{\frac{3}{2}}}=$

$$=\frac{\sqrt{2}l^3\cdot 2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}^2\alpha+2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4l^3\operatorname{tg}\alpha}{3(\operatorname{tg}^2\alpha+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

12(2). б. $n=6.\ V=\dfrac{6l^3}{6}\cdot\dfrac{\sin 60^\circ\cos 30^\circ\operatorname{tg}\alpha}{\left(\cos^2 30^\circ\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^{\frac{3}{2}}}=l^3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\left(\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^{\frac{3}{2}}}=$

$$=\frac{3l^3\cdot 8}{4}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{(3\operatorname{tg}^2\alpha+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6l^3\operatorname{tg}\alpha}{(3\operatorname{tg}^2\alpha+4)^{\frac{3}{2}}}.$$

12(3). в. $\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{a}{2l};\ a=2l\sin\dfrac{\gamma}{2};\ a=2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}.\ R=\dfrac{l\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}};\ H^2+R^2=l^2.$



$$H=\sqrt{\frac{l^2-l^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}=\frac{l}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{\sin^2\frac{180^\circ}{n}-\sin^2\frac{\gamma}{2}}.$$

$$V=\frac{n}{6}\sin\frac{360^\circ}{n}\cdot\frac{l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^3\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{\sin^2\frac{180^\circ}{n}-\sin^2\frac{\gamma}{2}}.$$

11.3. $n=3.\ V=\dfrac{3}{6}\sin 120^\circ\cdot\dfrac{l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^3 60^\circ}\sqrt{\sin^2 60^\circ-\sin^2\frac{\gamma}{2}}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^3}\cdot 2^3\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{2l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}}{3\cdot 2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}}{3}\sqrt{1+2\sin\gamma}.$$

12(1). в. $n=4.\ V=\dfrac{4}{6}\sin 90^\circ\cdot\dfrac{l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^3 45^\circ}\sqrt{\sin^2 45^\circ-\sin^2\frac{\gamma}{2}}=$

$$=\frac{2}{3}l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\sqrt{2^3}\sqrt{\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}}=$$

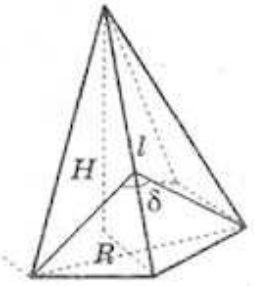
$$=\frac{4}{3}l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\sqrt{\cos\gamma}.$$

alldz.net

12(2). в. $n = 6$. $V = \frac{6}{6}\sin 60^\circ \cdot \frac{l^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^3 30^\circ}\sqrt{\sin^2 30^\circ - \sin^2 \frac{\gamma}{2}} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8l^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = 2\sqrt{3}l^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2}\sqrt{1 - 4\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = 2\sqrt{3}l^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2}\sqrt{2\cos\gamma - 1}.$

12(3). г. $\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\sin\beta$; $H = l\sin\beta$. $H = l\frac{\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.



$R^2 = l^2 - H^2 = l^2\left(1 - \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}\right) = l^2\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}\left(\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n} - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right)$;

$V = \frac{nl^3}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{180^\circ}{n} \cdot \sin\frac{360^\circ}{n} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n} - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right)$.

11.4. $n = 3$. $V = \frac{3}{6}l^3\operatorname{ctg}^3 60^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}l^3\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^3}\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right) = \frac{l^3}{12}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right)$.

12(1). г. $n = 4$. $V = \frac{4l^3}{6}\operatorname{ctg}^3 45^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(\operatorname{tg}^2 45^\circ - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right) =$

$= \frac{2l^3}{3}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right)$.

12(2). г. $n = 6$. $V = \frac{6l^3}{6}\operatorname{ctg}^3 30^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(\operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right) =$

$= l^3\left(\sqrt{3}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{3} - \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right) = \frac{3}{2}l^3\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(1 - 3\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right)$.

13. $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$. $S_{\text{осн.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; a, b, c — сторони основи.

$H = R \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$, R — радіус кола, описаного навколо основи.

$S_{\text{осн.}} = \sqrt{\left(2,5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2,5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$

$= \sqrt{(6,25 - 0,75)(0,75 - 0,25)} = \sqrt{5,5 \cdot 0,5} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$.

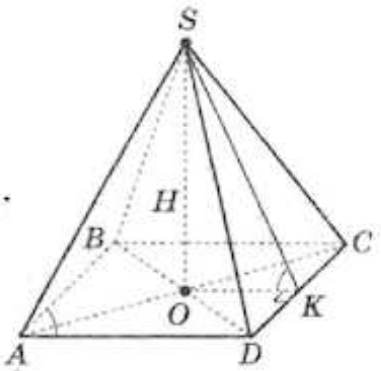
$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_\Delta} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$.

$H = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{11} \cdot \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{1}{2}$ м^3.

Відповідь: $\frac{1}{2}$ м^3.

aldz.net

14. Розглянемо піраміду $ABCDS$. $ABCD$ — ромб, $\angle A = 60°$, $OK \perp DC$; $\angle OKS = 60°$, $OK = r = \sqrt[3]{3}$ см. $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$.



$\sin \angle A = \frac{2r}{a}$, a — сторона ромба; $a = \frac{2r}{\sin 60°}$;

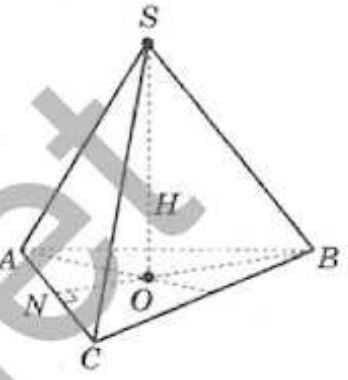
$S_{осн.} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A \cdot a^2 \sin 60° = \frac{4r^2 \sin 60°}{\sin^2 60°} = \frac{4r^2}{\sin 60°}$.

$H = r \operatorname{tg} \angle SKO = r \operatorname{tg} 60°$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4r^2}{\sin 60°} r \operatorname{tg} 60° = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3}{\cos 60°} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3} = 8$ см^3.

Відповідь: 8 см^3.

15. Розглянемо піраміду $ABCS$. $AB = BC$, $AC = 6$ см, $BN \perp AC$, $BN = 9$ см, $AS = BS = CS = 13$ см. $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$.



$S_{осн.} = \frac{1}{2} AC \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$ см^2.

$H^2 = BS^2 - R^2$, R — радіус кола, описаного навколо ABC. $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\triangle}}$;

$AB^2 = BN^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 9^2 + 3^2 = 90$; $AB = 3\sqrt{10}$ см.

$R = \frac{3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 6}{4 \cdot 27} = \frac{90}{18} = 5$ см. $H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см. $V = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 12 = 108$ см^3.

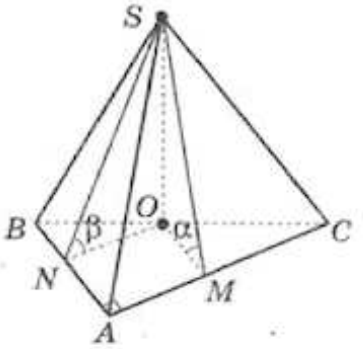
Відповідь: 108 см^3.

16. Розглянемо піраміду $ABCS$. $\angle A = 90°$, $AS = BS = CS$, тому вершина піраміди проектується в центр кола O, описаного навколо основи. O — середина гіпотенузи.

$OM \perp AC$, $ON \perp AB$, $\angle SMO = 30°$, $\angle SNO = 60°$.

OM і ON є середніми лініями ΔABC.

Отже, $AB = 2OM$, $AC = 2ON$.



ΔSOM: $\operatorname{tg} 30° = \frac{H}{OM}$; $OM = \frac{H}{\operatorname{tg} 30°} = 3\sqrt{3}$ см.

ΔSON: $\operatorname{tg} 60° = \frac{H}{ON}$; $ON = \frac{H}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ см.

$AB = 6\sqrt{3}$ см; $AC = 2\sqrt{3}$ см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 18$ см^2. $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 3 = 18$ см^3.

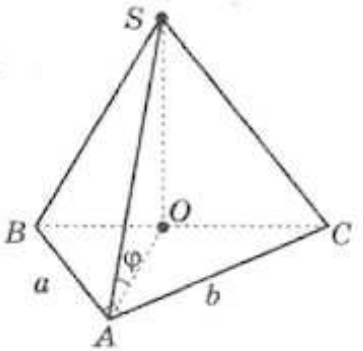
Відповідь: 18 см^3.

17. Нехай $ABCS$ — задана піраміда. $\angle A = 90°$. $SO \perp (ABC)$.

Оскільки $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \varphi$, то

O — центр кола, описаного навколо ΔABC.

Оскільки ΔABC — прямокутний, то O — середина AB.



$AB = a$, $AC = b$, $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$; $OC = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

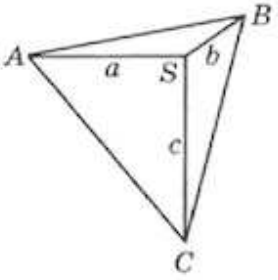
ΔSOC: $SO = OC \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \operatorname{tg} \varphi$.

alov.net

$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$. $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \operatorname{tg}\varphi = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{12} \operatorname{tg}\varphi$.

Відповідь: $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{12} \operatorname{tg}\varphi$.

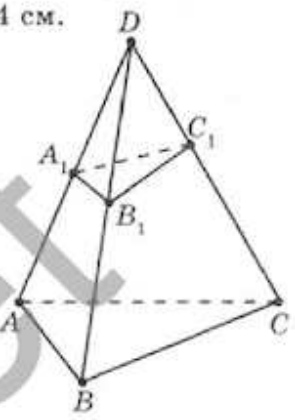
18. Розглянемо цю піраміду як піраміду з основою ASB ($AS \perp SB$) і висотою SC ($SC \perp (ASB)$). Маємо:



$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \cdot c = \frac{abc}{6}$.

Відповідь: $\frac{abc}{6}$.

19. Розглянемо тетраедр $DABC$. $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 3$ см, $CC_1 = 4$ см.



$\frac{V_{DA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \frac{1}{8}$.

Позначимо довжину бічного ребра x, тоді $DC_1 = x - 4$; $DB_1 = x - 3$; $DA_1 = x - 2$.

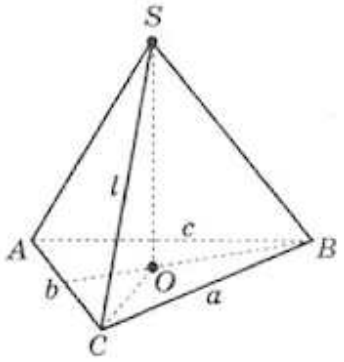
Нехай $V_{DA_1B_1C_1} = V_1$, а $V_{DABC} = V$, тоді $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{9}$.

За опорною задачею 1 — об'єми тетраедрів, які мають спільний тригранний кут, відносяться як добутки ребер, які утворюють цей кут. Маємо:

$\frac{V_1}{V} = \frac{(x-4)(x-3)(x-2)}{x^3} = \frac{1}{9}$, звідки $x = 6$ см.

Відповідь: 6 см.

20. Якщо всі бічні ребра рівні між собою, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи. Розглянемо піраміду, сторони основи якої a, b і c, а кожне бічне ребро l.



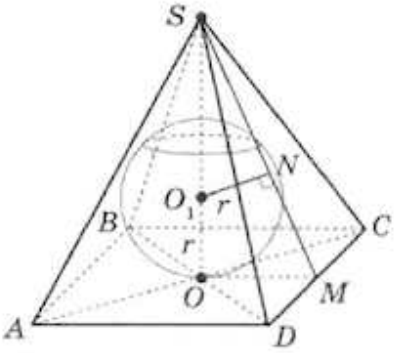
$V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$. $H = \sqrt{l^2 - R^2}$ (R — радіус кола, описаного навколо основи).

$R = \frac{abc}{4S_{осн.}}$. $H = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{осн.}}\right)^2} = \frac{\sqrt{4S_{осн.}^2 l^2 - (abc)^2}}{2S_{осн.}}$.

$V = \frac{1}{6}\sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)l^2 - (abc)^2}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{6}\sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)l^2 - (abc)^2}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

21. Розглянемо правильну піраміду $ABCDS$, у яку вписано кулю радіуса r.



Позначимо сторону основи a, висоту піраміди — H, а апофему — h, тоді:

$S_{осн.} = a^2$. $S_{б.\,гр.} = \frac{1}{2}ah$.

За умовою $S_{осн.} = S_{б.\,гр.}$. $a^2 = \frac{1}{2}ah$; $h = 2a$.

$\Delta O_1NS \sim \Delta MOS$ (за гострим кутом), тому

$\frac{O_1N}{O_1S} = \frac{OM}{SM}$; $\frac{r}{H-r} = \frac{\frac{a}{2}}{h}$; $\frac{r}{H-r} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$. Звідки $5r = H$.

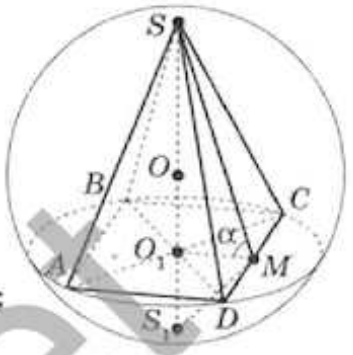
alg7.net

ΔSOM: $H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$. $\frac{a\sqrt{15}}{2} = 5r$; $a = \frac{2r\sqrt{15}}{3}$.

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$. $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6} = \left(\frac{2r\sqrt{15}}{3}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{100r^3}{9}$.

Відповідь: $\frac{100r^3}{9}$.

22. Розглянемо правильну піраміду $ABCDS$, вписану в кулю $(0; R)$.
Продовжимо висоту піраміди до перетину з кулею S_1. $\angle SCS_1 = 90°$ (спирається на діаметр).
$OS = R$, $SS_1 = 2R$; $O_1S = 2R - H$.
ΔSCS_1: $CO_1^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$; $SO_1 = H$.
Позначимо сторону основи a, тоді



$CO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{O_1S}{O_1M} = \frac{2H}{a}$; $H = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$;

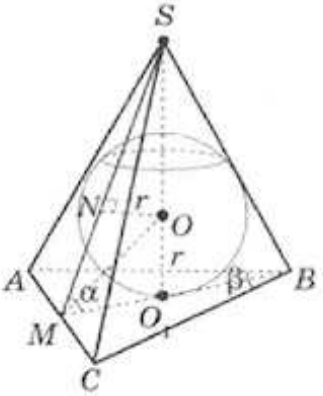
$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(2R - \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right) \cdot \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$; $\frac{a^2}{2} = \left(2R - \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right) \cdot \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$;

$a = \left(2R - \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$; $a = \frac{2 \cdot 2R\operatorname{tg}\alpha}{2 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$; $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$. $V = \frac{64R^3\operatorname{tg}^4\alpha}{6(2 + \operatorname{tg}^2\alpha)^3} = \frac{32R^3\operatorname{tg}^4\alpha}{3(2 + \operatorname{tg}^2\alpha)^3}$.

Відповідь: $\frac{32R^3\operatorname{tg}^4\alpha}{3(2 + \operatorname{tg}^2\alpha)^3}$.

23. Розглянемо піраміду $ABCS$, в яку вписано кулю $(0; r)$. $AB = BC$, $\angle ABC = \beta$. O_1 — центр кола радіуса r_1, вписаного в ΔABC. SM — апофема, $\angle SMO_1 = \alpha$. Позначимо H — висоту піраміди.



ΔMO_1O: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{r_1}$; $r_1 = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
N — точка дотику.
$ON \perp SM$. $\Delta SNO \sim \Delta SO_1M$ (за гострим кутом).

$\frac{r}{H - r} = \cos\alpha$; $H = \frac{r(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha} = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Нехай $AB = BC = a$, $AC = b$.

ΔCMO_1: $\angle MCO_1 = \frac{90° - \frac{\beta}{2}}{2} = 45° - \frac{\beta}{4}$; $\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right) = \frac{2r_1}{b}$;

$b = 2r_1\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right) = 2r_1\frac{1 + \cos\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)} = 2r_1\frac{1 + \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$; $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2a}$;

$a = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}} = r_1\frac{1 + \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = 2r_1\frac{1 + \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\beta}$;

$S_{\Delta} = \frac{1}{2}a^2\sin\beta = 2r_1^2\frac{\left(1 + \sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}} \cdot \sin\beta = 2r_1^2\frac{\left(1 + \sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{\sin\beta} = 2r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\frac{\left(1 + \sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{\sin\beta}$.

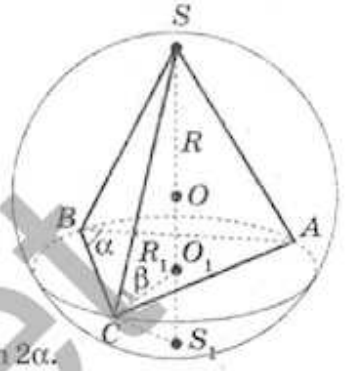
alloz.net

$2 \qquad \sin^2\beta \qquad \sin\beta \qquad 2 \qquad \sin\beta$

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle}\cdot H = \frac{2}{3}r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\frac{\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{\sin\beta}\cdot r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha\frac{\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{\sin\beta}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha\frac{\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{\sin\beta}$.

24. Розглянемо піраміду $ABCS$, вписану в кулю $(0; R)$. $AB = BC$, $\angle CAB = \angle ACB = \alpha$, O_1 — центр кола, описаного навколо ABC, R_1 — радіус цього кола. $\angle SCO_1 = \beta$. Нехай H — висота піраміди. Продовжимо висоту до перетину з кулею S_1.



$\angle SCS_1 = 90^\circ$ (спирається на діаметр).

$CO_1 \perp SS_1$. $SS_1 = 2R$. $S_1O_1 = 2R - H$.

ΔSCS_1: $CO_1^2 = SO_1\cdot O_1S$; $R_1^2 = H(2R - H)$.

ΔSO_1C: $H = R\operatorname{tg}\beta$.

Маємо: $R_1^2 = R_1\operatorname{tg}\beta(2R - R_1\operatorname{tg}\beta)$; $R_1 = R\sin 2\beta$.

ΔABC: Нехай $AB = BC = a$, $AC = b$, $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$.

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R_1$; $a = 2R_1\sin\alpha = 2R\sin 2\beta\sin\alpha$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha = 2R^2\sin^2 2\beta\sin^2\alpha\sin 2\alpha.$$

$R_1 = H\operatorname{ctg}\beta$; $H^2\operatorname{ctg}^2\beta = H(2R - H)$; $H = 2R\sin^2\beta$.

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}H = \frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\sin^2\alpha\sin 2\alpha = \frac{2}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\operatorname{tg}\alpha\sin^2 2\alpha.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\operatorname{tg}\alpha\sin^2 2\alpha$.

25. $V = \frac{1}{3}h\left(S_2 + S_1 + \sqrt{S_2\cdot S_1}\right)$ — об'єм зрізаної піраміди. $h = \frac{3V}{S_2 + S_1 + \sqrt{S_2\cdot S_1}}$.

Правильні шестикутники зі сторонами a_1 і a_2 мають площі відповідно $S_1 = \frac{3\sqrt{3}a_1^2}{2}$ і $S_2 = \frac{3\sqrt{3}a_2^2}{2}$. Отже,

$$S_2 + S_1 + \sqrt{S_2\cdot S_1} = \frac{3\sqrt{3}a_1^2}{2} + \frac{3\sqrt{3}a_2^2}{2} + \sqrt{\frac{3\sqrt{3}a_1^2\cdot 3\sqrt{3}a_2^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2).$$

$$h = \frac{2\cdot 3V}{3\sqrt{3}(a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2)} = \frac{2\sqrt{3}V}{3(a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2)}.$$

Відповідь: $\frac{2\sqrt{3}V}{3(a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2)}$.

26. Враховуючи результати задачі 25, об'єм зрізаної піраміди, в основах якої лежать правильні шестикутники:

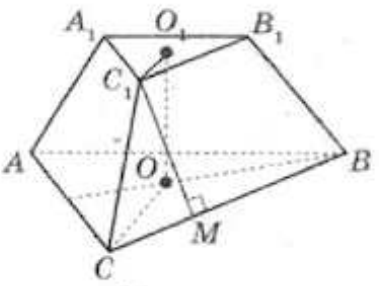
$V = \frac{h\sqrt{3}}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2)$. $V = 10{,}5$ м^3; $h = \sqrt{3}$ м; $a_1 = 2$ м; a_2 — ? $a_2 < a_1$.

$10{,}5 = \frac{3}{2}(4 + a_2^2 + 2a_2)$; $a_2^2 + 2a_2 - 3 = 0$; $a_2 = 1$ м.

Відповідь: 1 м.

alldz.net

27. Розглянемо правильну зрізану піраміду $ABCA_1B_1C_1$.



$AC = a$; $A_1C_1 = 0{,}5a$; $C_1M \perp CB$; $C_1M = a$.

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right);\quad S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\quad S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

O, O_1 — центри кіл, описаних навколо основ.

$$CM = \frac{BC - B_1C_1}{2} = \frac{a - 0{,}5a}{2} = \frac{a}{4};$$

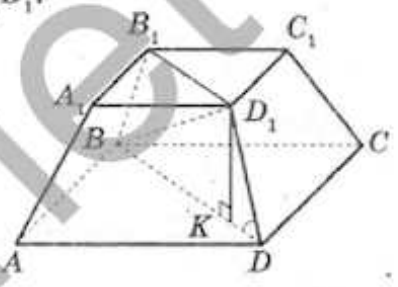
$$CC_1 = \sqrt{C_1M^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{17}}{4};\quad CO = \frac{a\sqrt{3}}{3};\quad C_1O_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$OO_1 = \sqrt{CC_1^2 - (CO - C_1O_1)^2} = \sqrt{\frac{17a^2}{16} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{47}}{4\sqrt{3}}.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{47}}{4\sqrt{3}}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{a^3\sqrt{47}}{48}\cdot\frac{7}{4} = \frac{7a^3\sqrt{47}}{192}.$$

Відповідь: $\dfrac{7a^3\sqrt{47}}{192}$.

28. Розглянемо правильну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



$BD = 8$ см, $B_1D_1 = 5$ см, $\angle BDD_1 = 45°$.

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

$$S_1 = \left(\frac{BD}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{BD^2}{2} = 32 \text{ см}^2;\quad S_2 = \frac{B_1D_1^2}{2} = 12{,}5 \text{ см}^2.$$

Проведемо $D_1K \perp BD$; $D_1K = h$.

$$KD = \frac{BD - B_1D_1}{2} = 1{,}5 \text{ см};\quad h = KD \cdot \operatorname{tg} 45° = 1{,}5 \text{ см}.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 1{,}5\left(32 + 12{,}5 + \sqrt{32 \cdot 12{,}5}\right) = 32{,}25 \text{ см}^3.$$

Відповідь: 32,25 см^3.

29. Див. рис. до № 28. Розглянемо правильну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

$AD = 14$ см; $A_1D_1 = 10$ см, $BD_1 = 18$ см.

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right);\quad S_1 = AD^2 = 196 \text{ см}^2;\quad S_2 = A_1D_1^2 = 100 \text{ см}^2.$$

$$D_1K \perp BD;\quad BK = BD = \frac{BD - B_1D_1}{2};\quad BD = 14\sqrt{2} \text{ см};\quad B_1D_1 = 10\sqrt{2} \text{ см};$$

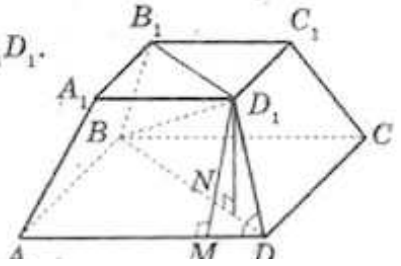
$$BK = 14\sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2} - 10\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ см};$$

$$h = D_1K = \sqrt{BD_1^2 - BK^2} = \sqrt{18^2 - \left(12\sqrt{2}\right)^2} = 6 \text{ см}.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 6\left(196 + 100 + \sqrt{196 \cdot 100}\right) = 872 \text{ см}^3.$$

Відповідь: 872 см^3.

30. Розглянемо правильну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



$AD = 4\sqrt{2}$ см; $A_1D_1 = \sqrt{2}$ см, $\angle ADD_1 = 60°$.

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right);$$

$S_1 = AD^2 = 32$ см^2;

$S_2 = A_1D_1^2 = 2$ см^2; $D_1M \perp AD$

alqz.net

$S_2 = A_1D_1 = 2$ см², $D_1M \perp AD$.

$MD = \dfrac{AD - A_1D_1}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ см (AA_1D_1D — рівнобічна трапеція).

$D_1D = \dfrac{MD}{\cos 60^\circ} = 3\sqrt{2}$ см.

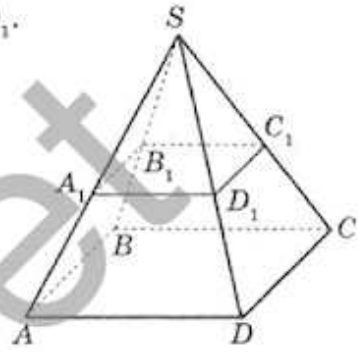
$D_1N \perp BD$. $ND = \dfrac{BD - B_1D_1}{2}$; $BD = AD\sqrt{2} = 8$ см; $B_1D_1 = A_1D_1\sqrt{2} = 2$ см.

$ND = \dfrac{8-2}{2} = 3$ см.

$h = D_1 \cdot N = \sqrt{D_1D^2 - ND^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 3^2} = 3$ см.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 3\left(32 + 2 + \sqrt{32 \cdot 2}\right) = 42$ см^3.

31. Розглянемо правильну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



$S_{ABCD} = 4$ см^2; $S_{A_1B_1C_1D_1} = 1$ см^2.

Піраміди $ABCDS$ і $A_1B_1C_1D_1S$ — подібні,

отже, $\dfrac{V_{ABCDS}}{V_{A_1B_1C_1D_1S}} = \left(\sqrt{\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}}}\right)^3 = \left(\sqrt{\dfrac{4}{1}}\right)^3 = 8.$

$V_{ABCDS} = 8V_{A_1B_1C_1D_1S}$; $V_{ABCDS} = V_{A_1B_1C_1D_1S} + V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$;

$7V_{A_1B_1C_1D_1S} = 21$ см^3; $V_{A_1B_1C_1D_1S} = 3$ см^3;

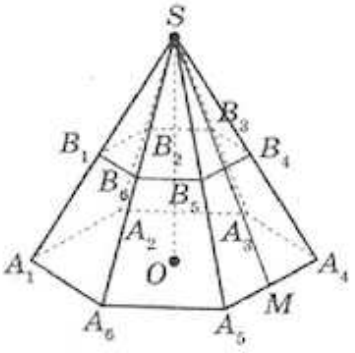
$V_{ABCDS} = 8 \cdot 3$ см^3 $= 24$ см^3.

Відповідь: 24 см^3.

32. Розглянемо правильну піраміду $A_1A_2A_3A_4A_5A_6S$.

Проведемо площину $B_1B_2B_3$, паралельну основі. Тоді піраміди $A_1A_2A_3A_4A_5A_6S$ і $B_1B_2B_3B_4B_5B_6S$ подібні і їх об'єми відносяться як куби відповідних лінійних розмірів.

Позначимо об'єм великої піраміди V, а об'єм маленької — V_1. Висоти цих пірамід дорівнюють відповідно H і h, тоді



$\dfrac{V_1}{V} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^3$; $V = V_1 + Q$; $V_1 = V - Q$;

$\dfrac{V-Q}{V} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^3$; $h = H\sqrt[3]{1 - \dfrac{Q}{V}}$.

$V = \dfrac{1}{3}H\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2H\sqrt{3}}{2}$. $h = H\sqrt[3]{1 - \dfrac{2Q\sqrt{3}}{3a^2H}}$.

Відповідь: $H\sqrt[3]{1 - \dfrac{2Q\sqrt{3}}{3a^2H}}$.

33. Позначимо об'єми двох подібних пірамід V_1 і V_2, тоді:

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = q, \\ \dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^3; \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = \dfrac{343}{125}V_2, \\ V_2\left(\dfrac{343}{125} - 1\right) = q; \end{cases} \quad \begin{cases} V_2 = \dfrac{125}{218}q, \\ V_1 = \dfrac{343}{218}q. \end{cases}$$

Відповідь: $\dfrac{125}{218}q$, $\dfrac{343}{218}q$.

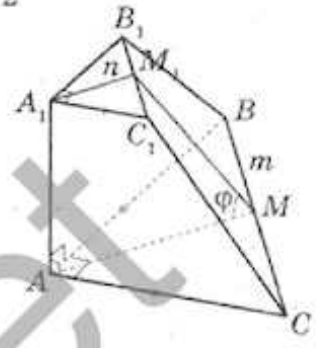
alloz.net

34. Нехай об'єми двох подібних багатогранників V_1 і V_2, тоді:

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = V, \\ \dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^3; \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = \dfrac{m^3}{n^3} V_2, \\ V_2\left(\dfrac{m^3}{n^3} + 1\right) = V; \end{cases} \quad \begin{cases} V_2 = \dfrac{n^3}{m^3 + n^3} V, \\ V_1 = \dfrac{m^3}{m^3 + n^3} V. \end{cases}$$

Відповідь: $\dfrac{n^3}{m^3 + n^3} V$, $\dfrac{m^3}{m^3 + n^3} V$.

35. Розглянемо зрізану піраміду $ABCA_1B_1C_1$. $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1 = 90°$, $BC = m$, $B_1C_1 = n$. $(AA_1C_1C) \perp (ABC)$ і $(AA_1B_1B) \perp (ABC)$, тому $AA_1 \perp (ABC)$, $h = AA_1$ — висота піраміди. $V = \dfrac{1}{3} h \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$; $S_1 = \dfrac{m^2}{2}$; $S_2 = \dfrac{n^2}{2}$.



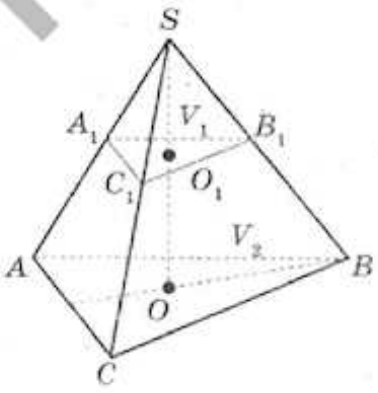
$AM \perp BC$, $A_1M_1 \perp B_1C_1$, тому за теоремою про три перпендикуляри $M_1M \perp BC$ і $\angle M_1MA = \varphi$. Розглянемо прямокутну трапецію AA_1M_1M.

$$AM = \frac{m}{2}; \quad A_1M_1 = \frac{n}{2}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{\frac{m}{2} - \frac{n}{2}}; \quad h = \frac{(m-n)\operatorname{tg}\varphi}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{(m-n)\operatorname{tg}\varphi}{2} (m^2 + n^2 + mn) \cdot \frac{1}{2} = \frac{(m^3 - n^3)\operatorname{tg}\varphi}{12}.$$

Відповідь: $\dfrac{(m^3 - n^3)\operatorname{tg}\varphi}{12}$.

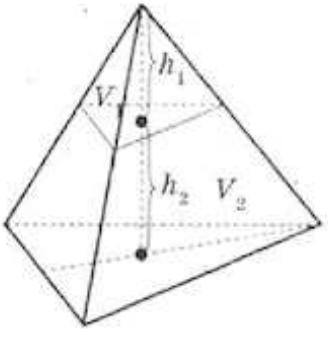
36. Розглянемо піраміду $SABC$ з висотою H. Проведемо $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$. Позначимо $V_{ABCA_1B_1C_1} = V_2$, $V_{A_1B_1C_1S} = V_1$, $V_{ABCS} = V$, $OS = H$, $O_1S = h$, тоді:



$$\begin{cases} \dfrac{V_2}{V_1} = m, \\ V_1 + V_2 = V, \\ \dfrac{V_1}{V} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^3; \end{cases} \quad \begin{cases} V_2 = mV_1, \\ V_1(1+m) = V, \\ h = H\sqrt[3]{\dfrac{V_1}{V}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{1+m}, \\ h = \dfrac{H}{\sqrt[3]{1+m}}. \end{cases}$$

Відповідь: $\dfrac{H}{\sqrt[3]{1+m}}$.

37. Позначимо V_1 — об'єм маленької піраміди, V_2 — об'єм зрізаної піраміди, V — об'єм усієї піраміди, а h_1, h_2 і H — висоти відповідно. Тоді:



$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{m}{n}, \\ V_1 + V_2 = V, \\ \dfrac{V_1}{V} = \left(\dfrac{h_1}{H}\right)^3; \end{cases} \quad \begin{cases} V_2 = \dfrac{n}{m} V_1, \\ V_1\left(1 + \dfrac{n}{m}\right) = V, \\ \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{m}{m+n}; \end{cases}$$

$$\frac{h_1}{H} = \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}; \quad h_1 = H\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}.$$

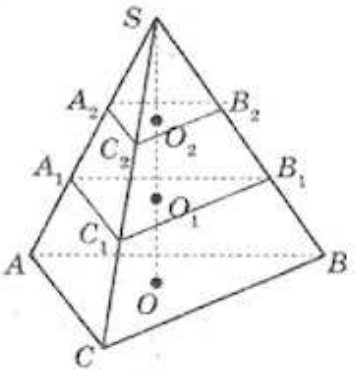
$$h_2 = H - h_1 = H - H\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}} = H\left(\frac{\sqrt[3]{m+n} - \sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m+n}}\right); \quad H = h_2 \frac{\sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{m+n} - \sqrt[3]{m}}.$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{m+n} - \sqrt[3]{m}}$.

alex.net

$\sqrt[n]{m+n}-\sqrt[n]{m}$

38. Позначимо об'єм всієї піраміди V, а її висоту H. Нехай об'єм верхньої маленької піраміди V_1, а відстань від вершини до основи h_1. Тоді маємо:



$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{V-V_1}=\dfrac{m}{n+p}, \\ \dfrac{V_1}{V}=\left(\dfrac{h_1}{H}\right)^3; \end{cases} \quad \frac{\frac{V_1}{V}}{1-\frac{V_1}{V}}=\frac{m}{n+p}, \quad \frac{V_1}{V}=\frac{m}{m+n+p},$$

$h_1 = H\sqrt[3]{\dfrac{m}{m+n+p}}$ — це перша відстань.

Тепер позначимо об'єм $A_1B_1C_1S$ — V_2,
а $O_1S = h_2$, тоді маємо:

$$\frac{V_2}{V-V_2}=\frac{m+n}{p}; \quad \frac{\frac{V_2}{V}}{1-\frac{V_2}{V}}=\frac{m+n}{p} \text{ і } \frac{h_2}{H}=\sqrt[3]{\frac{V_2}{V}}, \quad \frac{V_2}{V}=\frac{m+n}{p+m+n};$$

$h_2 = H\sqrt[3]{\dfrac{m+n}{p+m+n}}$.

Відповідь: $H\sqrt[3]{\dfrac{m}{m+n+p}}$; $H\sqrt[3]{\dfrac{m+n}{p+m+n}}$.

39. $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. $R = 15$ см, $l = 25$ см, $H^2 = l^2 - R^2$.

$H=\sqrt{25^2-15^2}=20$ см. $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 15^2\cdot 20=1500\pi$ см^3.

Відповідь: 1500π см^3.

40. 1) $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$; $H = 3$ см; $R = 1{,}5$ см. $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 1{,}5^2\cdot 3=2{,}25\pi$ см^3.

2) $H=\dfrac{3V}{\pi R^2}$; $R = 4$ см, $V = 48\pi$ см^3. $H=\dfrac{3\cdot 48\pi}{\pi\cdot 4^2}=9$ см.

3) $R=\sqrt{\dfrac{3V}{\pi}}$; $H = m$, $V = Q$. $R=\sqrt{\dfrac{3Q}{\pi m}}$.

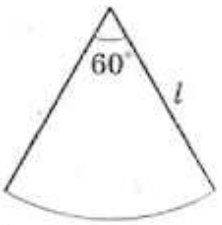
Відповідь: 1) $2{,}25\pi$ см^3; 2) 9 см; 3) $\sqrt{\dfrac{3Q}{\pi m}}$.

41. $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$, $H = 2R$, $R = 5$ см. $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot 2R=\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{250\pi}{3}$ см^3.

Відповідь: $\dfrac{250\pi}{3}$ см^3.

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H; \quad S_{\text{повн.}}=\pi R(R+l).$$

42. Площа кругового сектора — розгортки бічної поверхні конуса — дорівнює $\dfrac{\pi l^2}{360^\circ}\alpha$, $\alpha = 60^\circ$.



Отже, $\dfrac{\pi l^2 60^\circ}{360^\circ}=\pi Rl$; $l = 6R$.

$S_{\text{повн.}}=\pi R(R+6R)=45\pi$ дм^2; $R^2=\dfrac{45}{7}$, тоді $l^2=36R^2=\dfrac{1620}{7}$ дм^2,

ald.net

$H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{\frac{1620}{7} - \frac{45}{7}} = \sqrt{\frac{1575}{7}} = 15$ дм. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{45}{7} \cdot 15 = \frac{225\pi}{7}$ дм³.

Відповідь: $\frac{225\pi}{7}$ дм³.

43. Площа бічної поверхні конуса $S_б = \pi Rl$, але з другого боку це площа кругового сектора $S_с = \frac{\pi l^2 \alpha}{360°}$, $\alpha = 180°$, тому $S_с = \frac{\pi l^2}{2}$.

Порівнюючи ці два вирази, маємо: $\pi Rl = \frac{\pi l^2}{2}$; $R = \frac{l}{2}$.

$H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$; $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi l^3 \sqrt{3}}{24}$; $l = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ см.

$V = \frac{\pi\sqrt{3}}{24} \cdot \frac{24\sqrt{3}}{\pi} = 3$ см³.

Відповідь: 3 см³.

44. $S_{бічн.} = \pi Rl$. $S_{розг.} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360°} = \frac{\pi l^2}{4}$. $S_{бічн.} = S_{розг.}$ $\pi Rl = \frac{\pi l^2}{4}$; $l = 4R$.

$H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{(4R)^2 - R^2} = R\sqrt{15}$;

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^3 \sqrt{15} = \frac{1}{3}\pi\sqrt{15}\,\frac{\sqrt{15}}{\pi} = 5$ см³.

Відповідь: 5 см³.

45. Оскільки конус вписано в піраміду, то $H_к = H_п$. R — радіус кола, вписаного в основу піраміди.

Якщо a — сторона основи піраміди, то $a = 2R$.

$V_п = \frac{1}{3}a^2 H = \frac{4R^2 H}{3}$; $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. $V_{кон.} = \frac{V_п \cdot \pi}{4} = \frac{288}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 72$.

Відповідь: 72.

46. Якщо конус вписаний у правильну чотирикутну призму, то $H_к = H_{пр.}$.

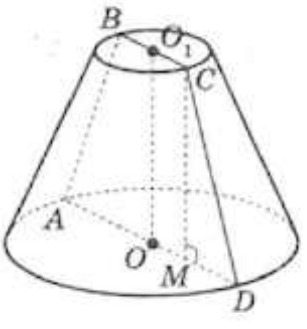
Якщо a — сторона основи призми, то $a = 2R_к$.

$V_{пр.} = a^2 H = 4R^2 H$; $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. $V_{пр.} = \frac{12V_к}{\pi} = \frac{12 \cdot 17\pi}{\pi} = 204$ см³.

Відповідь: 204 см³.

47. Розглянемо зрізаний конус з радіусами основ $R_1 = 27$ см, $R_2 = 18$ см.

CD — твірна, $CD = 21$ см. $V = \frac{1}{3}h(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$.



Проведемо $CM \parallel OO_1$. $h = CM = \sqrt{CD^2 - MD^2}$;
$MD = R_1 - R_2$. $MD = 27 - 18 = 9$ см.
$h = \sqrt{21^2 - 9^2} = 6\sqrt{10}$ см.

$V = \frac{6\sqrt{10}}{3}(27^2 + 18^2 + 27 \cdot 18) = 3078\sqrt{10}$ см³.

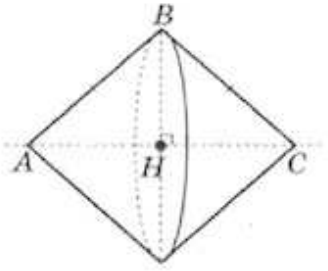
Відповідь: $3078\sqrt{10}$ см³.

alaz.net

Видавець: 80Т8х10 см.

48. Розглянемо рівнобедрений ΔABC ($AB = BC$).

$AC = \dfrac{9}{\pi}$ см, $BH \perp AC$, $BH = 7\sqrt{2}$ см.

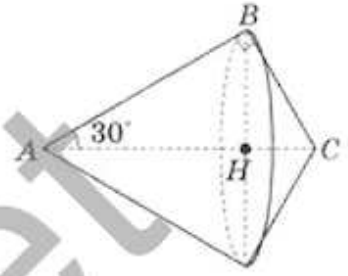


Якщо він обертається навколо основи AC, то отримуємо два однакових конуса з $R = 7\sqrt{2}$ см і $H = \dfrac{9}{2\pi}$ см.

$V = 2 \cdot \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$; $V = \dfrac{2}{3}\pi\left(7\sqrt{2}\right)^2 \cdot \dfrac{9}{2\pi} = \dfrac{2\pi \cdot 98 \cdot 9}{3 \cdot 2\pi} = 294$ см^3.

Відповідь: 294 см^3.

49. Розглянемо прямокутний ΔABC ($\angle B = 90°$), який обертається навколо гіпотенузи AC. $AC = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$, $\angle BAC = 30°$.



Проведемо $BH \perp AC$. Тоді при обертанні маємо два конуси зі спільною основою ($R = BH$) і висотами $H_1 = AH$, $H_2 = CH$.

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H_1 + \dfrac{1}{3}\pi R^2 H_2 = \dfrac{\pi R^2}{3}(H_1 + H_2)$.

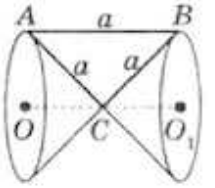
ΔABC: $AB = AC \cos 30°$; ΔAHB: $BH = AB \sin 30°$.

Отже, $R = BH = AC \sin 30° \cos 30° = \dfrac{AC}{2}\sin 60° = \dfrac{AC\sqrt{3}}{4}$.

$V = \dfrac{\pi}{3}\dfrac{AC^2 \cdot 3}{16} \cdot AC = \dfrac{\pi AC^3}{16} = \dfrac{\pi}{16} \cdot \dfrac{8}{\pi} = \dfrac{1}{2}$ см^3.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$ см^3.

50. Розглянемо рівносторонній ΔABC зі стороною a, який обертається навколо OO_1, $OO_1 \parallel AB$, $C \in OO_1$.

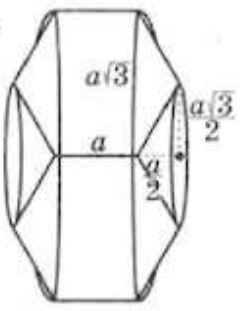


При обертанні отримуємо циліндр з $R = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ і $H = a$ без двох однакових конусів з $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ і $H = \dfrac{a}{2}$.

Отже, $V = V_{ц.} - 2V_{к.} = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 a - \dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a^3\pi}{4}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi a^3}{2}$.

51. При обертанні правильного шестикутника зі стороною a навколо однієї з його сторін утворюється циліндр з $R = a\sqrt{3}$ і $H = a$ додати 2 зрізаних конуси з $R_1 = a\sqrt{3}$, $R_2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $H = \dfrac{a}{2}$ без 2 конусів з $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ і $h = \dfrac{a}{2}$.



Отже, $V = V_{ц} + 2V_{зр.\ кон.} - 2V_{к}$. $V_{ц} = \pi R^2 H = 3\pi a^3$.

$V_{зр.\ кон.} = \dfrac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) = \dfrac{7}{8}\pi a^3$; $V_{к.} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi a^3}{8}$;

$V = \pi a^3\left(3 + \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{4}\right) = 4{,}5\pi a^3$.

Відповідь: $4{,}5\pi a^3$.

alov.net

52. Розглянемо правильну піраміду $ABCS$ зі стороною основи a, в яку вписано конус. $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, де $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

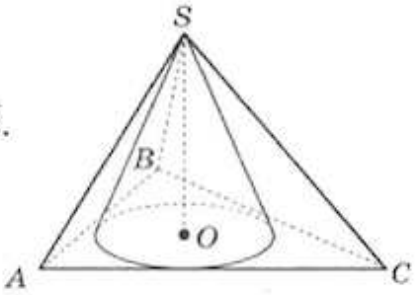
За умовою: $S_{\text{бічн. пір.}} = 5 \cdot S_{\text{осн. пір.}}$

Оскільки апофема піраміди є твірною конуса, то $S_{\text{бічн. пір.}} = \frac{3al}{2}$, l — твірна.

$S_{\text{осн.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Маємо: $\frac{3al}{2} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$; $l = \frac{5a\sqrt{3}}{6}$.

$$H_{\text{кон.}} = H_{\text{пір.}} = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{5a\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = a\sqrt{2}.$$

$$V_к = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{36}.$$



Відповідь: $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{36}$.

53. Розглянемо конус з вершиною S і центром основи O, в який вписано кулю $(O_1; r)$.

В осьовому перерізі бачимо рівнобедрений трикутник ABS ($AS = BS$), у який вписано коло $(O_1; r)$. $\varphi = \angle ABS$ — шуканий.

Позначимо $V_{ABS} = V$, $V_{KPS} = V_1$, тоді $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}$.

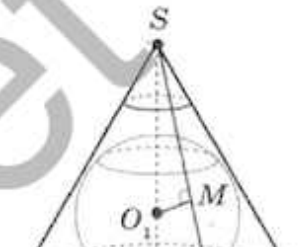
h — висота KPS, H — висота ABS.

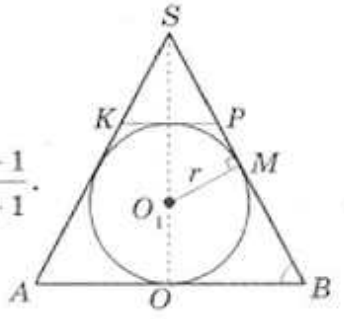
Маємо: $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{1}{2}$; $\frac{h}{H} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

$\angle BSO = 90° - \varphi$. $\sin(90° - \varphi) = \cos\alpha = \frac{O_1M}{O_1S} = \frac{r}{h + r}$;

$H - h = 2r$; $r = \frac{H - h}{2}$;

$$\cos\varphi = \frac{H - h}{h + H} = \frac{1 - \frac{h}{H}}{\frac{h}{H} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} + 1}; \quad \varphi = \arccos\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} + 1}.$$





Відповідь: $\arccos\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} + 1}$.

54. В осьовому перерізі бачимо рівнобедрену трапецію $ABCD$ ($AB = BC$), в яку вписано коло $(O; r)$.

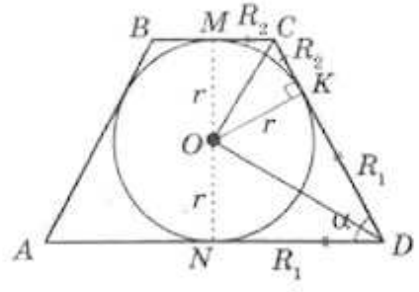
$V = \frac{1}{3}h\pi(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$, $h = 2r$,

$R_1 = AD : 2 = ND$; $R_2 = BC : 2 = MC$.

$OK \perp CD$. $\angle ODK = \frac{\alpha}{2}$.

ΔOKD: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R_1}$; $R_1 = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

ΔOKC: $\operatorname{tg}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{r}{R_2}$; $R_2 = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.



ald7.net

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot 2r\left(r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + r^2 \right) = \frac{2r^3\pi}{3}\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right) =$$

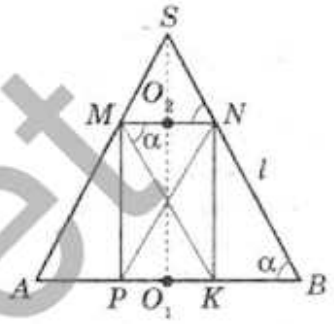
$$= \frac{2r^3\pi}{3}\left(\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 - 1 \right).$$

Відповідь: $\frac{2r^3\pi}{3}\left(\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 - 1 \right)$.

55. В осьовому перерізі бачимо рівнобедрений трикутник ASB ($AS = SB = l$) із кутом при основі α, в який вписано прямокутник $PMNK$. $MK \parallel NB$, $NP \parallel AM$.

$V = V_{кон} - V_{цил} - V_{MSN}$.

Позначимо радіус циліндра r, тоді з $MK \parallel NB$, $MN \parallel KB \Rightarrow KB = MN = 2r$, $O_1B = 3r$.



ΔSO_1B: $3r = l\cos\alpha$; $r = \frac{l}{3}\cos\alpha$.

$V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$; $R = 3r = l\cos\alpha$; $H = l\sin\alpha$.

$V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi l^2 \cos^2\alpha \cdot l\sin\alpha = \frac{\pi l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha}{3}$.

$V_{ц} = \pi r^2 \cdot NK$; $NK = 2r\operatorname{tg}\alpha = \frac{2l}{3}\sin\alpha$.

$V_{ц.} = \pi\frac{l^2}{9}\cos^2\alpha \cdot \frac{2l}{3}\sin\alpha = \frac{2\pi l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha}{27}$;

$V_{MSN} = \frac{1}{3}\pi r^2 O_2S$; $O_2S = r\operatorname{tg}\alpha = \frac{l\sin\alpha}{3}$;

$V_{MSN} = \frac{1}{3}\pi\frac{l^2}{9}\cos^2\alpha\frac{l\sin\alpha}{3} = \frac{\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{81}$;

$V = \pi l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{27} - \frac{1}{81}\right) = \frac{20}{81}\pi l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha$.

Відповідь: $\frac{20}{81}\pi l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha$.

§ 25. Об'єми кулі та її частин. Площа сфери

ПОЯСНЕННЯ

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — об'єм кулі;

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$ — об'єм кульового сектора;

$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$ — об'єм сегмента кулі;

$S = 4\pi R^2$ — площа сфери.

Завдання 22

1. Площа поверхні земної кулі становить $S = 4\pi R^2$ ($R \approx 6375$ км). Якщо $\frac{3}{4}$ поверхні займає вода, то на сушу залишається $\frac{1}{4}S$. Отже, $S_c = \pi R^2 = \pi \cdot 6375^2$ км^2.

Відповідь: $\pi \cdot 6375^2$ км^2.

alдz.net

2. Нехай V_1 — об'єм кавуна з $R_1 = 10$ см, а V_2 — об'єм кавуна з $R_2 = 20$ см. Тоді:

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4000\pi}{3}$ см^3; $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{32\,000\pi}{3}$ см^3;

n_1 і n_2 — об'єм кавуна, який з'їсть 1 людина.

$n_1 = \frac{4000\pi}{3 \cdot 3} = \frac{4000}{9}\pi$ см^3; $n_2 = \frac{32\,000\pi}{3 \cdot 8} = \frac{4000}{3}\pi$ см^3. $n_2 > n_1$.

Відповідь: увісьмох.

3. Відношення крупи й води не залежить від об'єму казана.

Відповідь: таке саме.

4. $S_{\text{ш.}} = 4\pi R^2 = 400\pi$ см^2. $S_{\text{матер.}} = 400\pi \cdot 1{,}1 = 440\pi$ см^2.

Відповідь: 440π см^2.

5. $R_C = 3$ м, $h = 50$ см $= \frac{1}{2}$ м; $\pi = 3$.

$R_C^2 + (R - h)^2 = R^2$; $3^2 + \left(R - \frac{1}{2}\right)^2 = R^2$; $R = 9\frac{1}{4}$ м.

$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(3 \cdot 9\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{109}{4} = \frac{109}{16} = 7$ м^3.

Відповідь: 7 м^3.

6. $R_{\text{п}} = 4R_M$. $\frac{V_M}{V_{\text{з}}} = \left(\frac{R_M}{R_{\text{з}}}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

Відповідь: 1 : 64.

7. $R_{\text{з}} = 2R_M$. $\frac{S_{\text{з}}}{S_M} = \left(\frac{R_{\text{з}}}{R_M}\right)^2 = 4$.

Відповідь: у 4 рази.

8. $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{R}{\frac{R}{10}}\right)^2 = 100$.

Відповідь: 100.

9. $\frac{V}{V_1} = \left(\frac{5r}{r}\right)^3 = 125$.

Відповідь: 125.

10. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $R^3 = \frac{3V}{4\pi}$; $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Відповідь: $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

11. 1) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $S = 4\pi R^2$; $R = 4$ см. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3$ см^3 $= \frac{256}{3}\pi$ см^3.

$S = 4\pi \cdot 4^2$ см^2 $= 64\pi$ см^2.

2) $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$; $S = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$; $V = 4000$ см^3. $R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4000}{4\pi}}$ см $= 10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ см.

$S = 4\pi\left(\frac{3 \cdot 4000}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 400\pi\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ см^2.

3) $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$; $V = \frac{1}{6}S\sqrt{\frac{S}{\pi}}$; $S = 64\pi$ см^2.

$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{64\pi}{\pi}} = 4$ см; $V = \frac{1}{6} \cdot 64\pi\sqrt{\frac{64\pi}{\pi}} = \frac{256}{3}\pi$ см^3.

Відповідь: 1) 64π см^2; $\frac{256}{3}\pi$ см^3; 2) $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ см; $400\pi\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ см^2; 3) 4 см; $\frac{256}{3}\pi$ см^3.

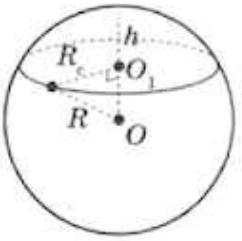
aldz.net

12. $V = V_1 + V_2 = 720\pi + 252\pi = 972\pi$ см³.

$S = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ (див. завдання № 11.2). $S = 4\pi\left(\frac{3 \cdot 972\pi}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 4\pi \cdot 9^2 = 324$ см².

Відповідь: 324 см².

13. $S = 4\pi R^2$.



1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ — сфера, $R = \sqrt{3}$.

$S = 4\pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = 12\pi$ кв. од.

2) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$ — сфера, $R^2 = 16$.

$S = 4\pi \cdot 16 = 64\pi$ кв. од.

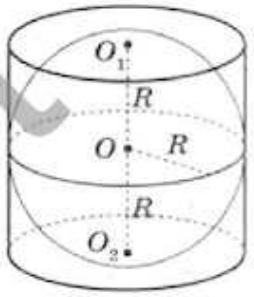
3) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 0$;

$(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ — сфера, $R^2 = 1$. $S = 4\pi \cdot 1 = 4\pi$ кв. од.

4) $x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 3$; $(z - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ — сфера, $R^2 = 9$. $S = 4\pi \cdot 9 = 36\pi$ кв. од.

Відповідь: 1) 12π кв. од.; 2) 64π кв. од.; 3) 4π кв. од.; 4) 36π кв. од.

14. Розглянемо кулю, вписану в циліндр.



$R_ц = R_к = R$; $H_ц = 2R_к = 2R$. $V_ц = \pi R_ц^2 \cdot H_ц = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$;

$V_к = \frac{4}{3}\pi R_к^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$; $\frac{V_к}{V_ц} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) : (2\pi R^3) = \frac{2}{3}$.

$S_ц = 2\pi R_ц(R_ц + H_ц) = 2\pi R(R + 2R) = 6\pi R^2$;

$S_к = 4\pi R_к^2 = 4\pi R^2$; $\frac{S_к}{S_ц} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}$.

15. $V_1 = \pi R_1^2 H_1$; $V_2 = \pi R_2^2 H_2$; $V_1 = V_2$, тому $R_1^2 H_1 = R_2^2 H_2$; $\frac{R_1 H_1}{R_2 H_2} = \frac{R_2}{R_1}$.

$S_1 = 2\pi R_1 H_1$; $S_2 = 2\pi R_2 H_2$; $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R_1 H_1}{2\pi R_2 H_2} = \frac{R_1 H_1}{R_2 H_2} = \frac{R_2}{R_1}$.

16. $H_к = 2R_{сф}$; $2R_к = l$.

$S_{сф} = 4\pi R_{сф}^2$; $S_к = \pi R_к^2 + \pi R_к l$; $H_к = \sqrt{l^2 - R_к^2} = \sqrt{4R_к^2 - R_к^2} = R_к\sqrt{3}$; $R_{сф} = \frac{\sqrt{3}}{2} R_к$.

$S_{сф} = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_к\right)^2 = 3\pi R_к^2$; $S_к = \pi R_к^2 + \pi \cdot R_к \cdot 2R_к = 3\pi R_к^2$.

Отже, $S_{сф} = S_к$.

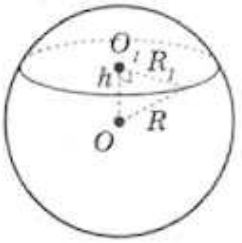
17. $S_1 = 43$ см²; $V_2 = 27V_1$. $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 27$; $\frac{S_2}{S_1} = 27^{\frac{2}{3}}$; $S_2 = 9S_1$; $S_2 = 9 \cdot 43$ см² $= 387$ см².

Відповідь: 387 см².

18. $S_1 = 393$ см²; $R_2 = \sqrt{3}R_1$. $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 3$; $S_2 = S_1 : 3 = 393 : 3 = 131$ см².

Відповідь: 131 см³.

19. Розглянемо кулю $(O; R)$, від якої січна площина, що знаходиться на відстані $h = \sqrt{\frac{30}{\pi}}$ см, відтинає круг площею $S_1 = 15$ см².



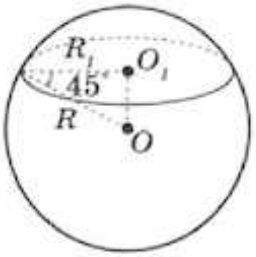
$S_{пер} = \pi R_1^2 = 15$ см²; $R_1 = \sqrt{\frac{15}{\pi}}$ см. $h^2 + R_1^2 = R^2$;

alqz.net

$R = \sqrt{\frac{30}{\pi} + \frac{15}{\pi}} = 3\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ см. $S_к = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{45}{\pi} = 180$ см².

Відповідь: 180 см².

20. Розглянемо кулю $(O; R)$, січна площина до якої становить 45° із кінцем радіуса.



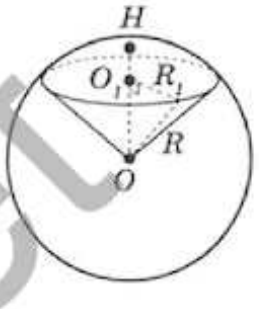
$S_к = 4\pi R^2 = 125$ см²; $R = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ см.

$R_1 = R\cos 45°$; $R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ см.

$S_{пер} = \pi R_1^2 = \pi \cdot \frac{25}{16} \cdot \frac{10}{\pi} = \frac{250}{16}$ см² $= \frac{125}{8}$ см².

Відповідь: $\frac{125}{8}$ см².

21. Розглянемо кульовий сектор з висотою H.



$R_1 = 60$ см — радіус основи відповідного кульового сегмента, $R = 75$ см — радіус кулі.

$(R - H)^2 + R_1^2 = R^2$; $(75 - H)^2 + 60^2 = 75^2$; $H = 30$ см.

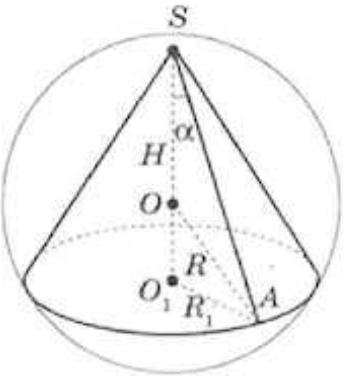
$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$; $V = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 112\,500\pi$ см³.

Відповідь: $112\,500\pi$ см³.

22. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$ см³. $R = 3$ см. $S = \frac{4\pi R^2}{2} + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 27\pi$ см².

Відповідь: 27π см².

23. Розглянемо конус, вписаний у кулю. Нехай R_1 і H — радіус і висота конуса. R — радіус кулі, $\angle O_1SA = \alpha$.



$H = R_1 \operatorname{ctg}\alpha$. $V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi R_1^2 H = \frac{1}{3}\pi R_1^3 \operatorname{ctg}\alpha$; $V_{кул.} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$\frac{V_{кон.}}{V_{кул.}} = \frac{\pi R_1^3 \operatorname{ctg}\alpha}{3} \cdot \frac{3}{4\pi R^3} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{4}\left(\frac{R_1}{R}\right)^3$.

ΔOO_1A: $OA = R$, $O_1A = R_1$, $OO_1 = H - R$,

тому $R^2 = (H - R)^2 + R_1^2$; $R^2 = (R_1 \operatorname{ctg}\alpha - R)^2 + R_1^2$;

$R^2 = R_1^2 \operatorname{ctg}^2\alpha - 2R_1R\operatorname{ctg}\alpha + R^2 + R_1^2$;

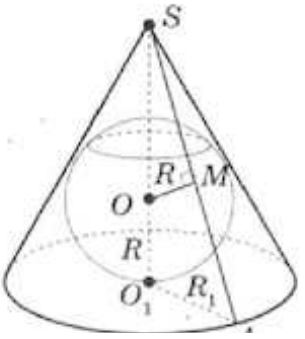
$R_1(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) = 2R\operatorname{ctg}\alpha$;

$\frac{R_1}{R} = 2\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin^2\alpha = \sin 2\alpha$. $\frac{V_{кон.}}{V_{кул.}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{4}\sin^3 2\alpha$.

Відповідь: $\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\alpha \sin^3 2\alpha$.

24. Розглянемо кулю $(O; R)$, вписану в конус.

Нехай R_1, H — радіус і висота конуса, тоді $H = 4R$.



$V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi R_1^2 H = \frac{4}{3}\pi R_1^2 \cdot R$; $V_{кул.} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$\frac{V_{кон.}}{V_{кул.}} = \frac{4\pi R_1^2 \cdot R}{3} \cdot \frac{3}{4\pi R^3} = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2$.

M — точка дотику. $\Delta OMS \sim \Delta AO_1S$ (спільний кут).

$\frac{OM}{OS} = \frac{AO_1}{AS}$; $\frac{R}{H - R} = \frac{R_1}{\sqrt{H^2 + R^2}}$.

alox.net

Підставимо замість H — $4R$, тоді $\frac{R}{4R-R}=\frac{R_1}{\sqrt{16R^2+R_1^2}}=\frac{1}{3}$; $9R_1^2=16R^2+R_1^2$;

$R_1^2=2R^2$; $\left(\frac{R_1}{R}\right)^2=2$; $\frac{V_{кон.}}{V_{кул.}}=\left(\frac{R_1}{R}\right)^2=2$.

Відповідь: 2.

25. Розглянемо осьовий переріз. Нехай R — радіус кулі, вписаної в конус, а φ — кут між твірною й основою конуса.



ΔOMB: $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\frac{r}{R}$; $r=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, r — радіус основи конуса.

ΔSMB: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{H}{r}$; $H=r\operatorname{tg}\varphi=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi$,

H — висота конуса.

$V_{кон.}=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\cdot R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi=$

$=\frac{\pi R^3\operatorname{tg}\varphi}{3\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}=\frac{2\pi R^3}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}$.

$V_{кул.}=\frac{4}{3}\pi R^3$. За умовою $V_{кон.}=\frac{9}{4}V_{кул.}$. $\frac{2\pi R^3}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$.

Позначимо $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=t$, тоді $2=9t(1-t)$; $9t^2-9t+2=0$; $t_1=\frac{1}{3}$; $t_2=\frac{2}{3}$.

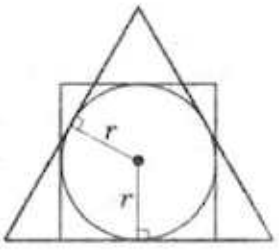
$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\varphi=60°$. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\varphi=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Відповідь: 60° або $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

26. Розглянемо осьовий переріз. У перерізі бачимо круг, навколо якого описаний квадрат і рівносторонній трикутник.

Треба довести, що: $(S_{повн.ц.})^2=S_{сф.}\cdot S_{повн.кон}$.

Позначимо радіус сфери r і виразимо через r усі необхідні величини.



$S_{повн.ц.}=2\pi R_ц(R_ц+H_ц)$. $H_ц=2r$; $R_ц=r$,

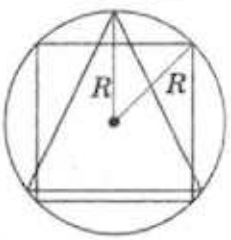
отже, $S_{повн.ц.}=2\pi r(r+2r)=6\pi r^2$.

$S_{сф.}=4\pi r^2$. $S_{кон.}=\pi R_к(R_к+l_к)$. $l_к=2r\sqrt{3}$, $R_к=r\sqrt{3}$,

отже, $S_{повн.кон.}=\pi\cdot r\sqrt{3}\left(r\sqrt{3}+2r\sqrt{3}\right)=\pi r\sqrt{3}\cdot 3r\sqrt{3}=9\pi r^2$.

Маємо: $(6\pi r^2)^2=4\pi r^2\cdot 9\pi r^2$; $36\pi^2r^4=36\pi^2r^4$.

27. В осьовому перерізі бачимо рівносторонній трикутник і квадрат, які вписані в коло радіуса R. Треба довести, що $V_ц=\sqrt{V_{кон.}\cdot V_{сф.}}$.



$V_{кон.}=\frac{1}{3}\pi R_к^2\cdot H_к$; $R_к=\frac{R\sqrt{3}}{2}$; $H_к=\frac{3R}{2}$.

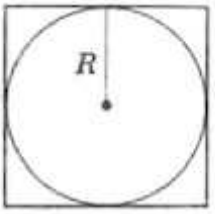
$V_{кон.}=\frac{1}{3}\pi\frac{3R^2}{4}\cdot\frac{3R}{2}=\frac{3\pi R^3}{8}$.

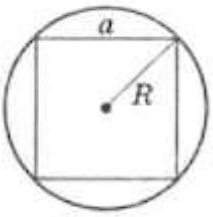
$V_ц=\pi R_ц^2\cdot H_ц$; $R_ц=\frac{R\sqrt{2}}{2}$; $H_ц=R\sqrt{2}$. $V_ц=\pi\frac{R^2}{2}\cdot R\sqrt{2}=\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$.

$V_{сф.}=\frac{4}{3}\pi R^3$. Маємо: $\sqrt{\frac{3\pi R^3}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$, що й треба було довести.

alдz.net

29. 1) В осьовому перерізі бачимо коло, вписане в квадрат зі стороною a. $R = \frac{a}{2}$. Отже, $S = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{a^2}{4} = \pi a^2$.





2) В осьовому перерізі бачимо квадрат зі стороною a, вписаний у коло радіуса R.

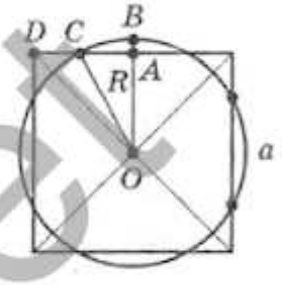
$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $S = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{a^2}{2} = 2\pi a^2$.

3) Якщо сфера проходить через середини всіх ребер куба, то її R дорівнює відстані від центра куба до середини будь-якого ребра, тобто половині діагоналі його грані.

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. тоді $S = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{a^2}{2} = 2\pi a^2$.

Відповідь: $2\pi a^2$.

4) Розглянемо осьовий переріз.



$CD = \frac{a}{3}$; $AC = \frac{a}{6}$; $OA = \frac{a}{2}$.

$R^2 = AC^2 + OA^2 = \frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{4} = \frac{10a^2}{36} = \frac{5a^2}{18}$.

$S = 4\pi R^2 = \frac{10a^2}{9}\pi$.

30. Розглянемо сферу, яку переріз поділив на частини 12π дм^2 і 24π дм^2.

Тоді загальна площа сфери $12\pi + 24\pi = 36\pi$ дм^2.

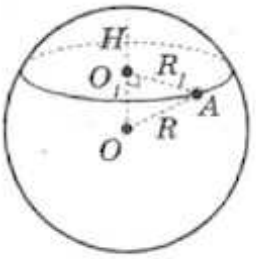
Маємо: $4\pi R^2 = 36\pi$ дм^2, $R_{сф.} = 3$ дм.

$S_{сегм.} = 2\pi RH$; $2\pi \cdot 3 \cdot H = 12\pi$ дм^2; $H_{сегм.} = 2$ дм.

ΔAO_1O: $R_1^2 + (R - H)^2 = R^2$; $R_1^2 = 3^2 - (3 - 2)^2 = 8$ дм^2.

$S_{пер.} = \pi R_1^2 = 8\pi$ дм^2.

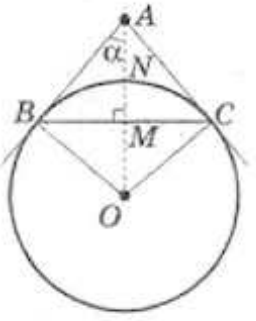
Відповідь: 8π дм^2.



31. Розглянемо сферу (0; 15) і точку A, в якій розміщено джерело світла. Проведемо дотичні до сфери AB і AC. Бачимо, що освітлюється сегмент сфери, обмежений дугою BNC.

ΔABO: $\angle B = 90°$, $BO = 15$ см, $AO = 10$ см + 15 см = 25 см.

$\angle A = \alpha$, тоді $\sin\alpha = \frac{BO}{AO} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$; $AB = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ см.



ΔAMB: $\cos\alpha = AM : AB$; $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{4}{5}$.

Отже, $AM = AB\cos\alpha$; $AM = 20 \cdot \frac{4}{5} = 16$ см.

Тому $H_{сегм.} = AM - AN = 16$ см $- 10$ см $= 6$ см.

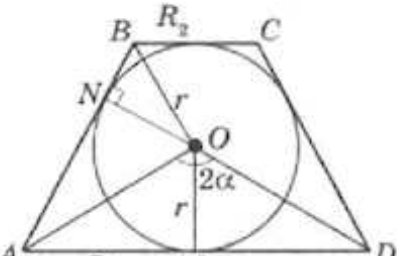
$S_{сегм.} = 2\pi RH = 2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 6 = 180\pi$ см^2.

Відповідь: 180π см^2.

32. В осьовому перерізі бачимо рівнобічну трапецію, в яку вписане коло (0; r).

ΔAMO: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_1}{r}$; $R_1 = r\operatorname{tg}\alpha$.

Оскільки коло вписане в трапецію, то $R_1 = AN$, $R_2 = BN$.



alaz.net

ΔAOB: $\angle O = 90°$; $r^2 = R_1R_2$;

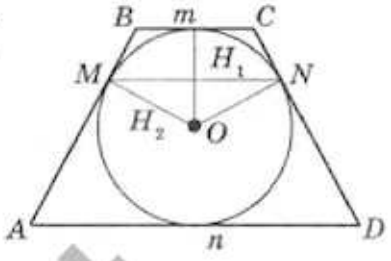
$R_2 = \dfrac{r^2}{R_1} = \dfrac{r^2}{r} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = r\operatorname{ctg}\alpha$. $H_{\text{в}} = 2r$.

$V = \dfrac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2r(r^2\operatorname{tg}^2\alpha + r^2\operatorname{ctg}^2\alpha + r^2) =$

$= \dfrac{2\pi r^3}{3}((\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 1)$.

Відповідь: $\dfrac{2\pi r^3}{3}((\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 1)$.

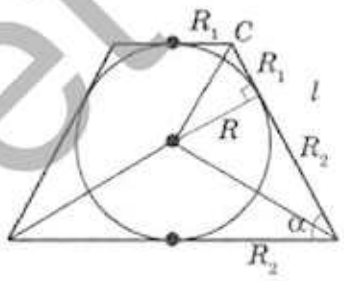
33. В осьовому перерізі бачимо рівнобічну трапецію $ABCD$, в яку вписане коло. Лінія дотику MN поділяє трапецію на дві подібні трапеції, тому



$\dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{m}{n}$. $\dfrac{S_{\text{сегм.1}}}{S_{\text{сегм.2}}} = \dfrac{2\pi RH_1}{2\pi RH_2} = \dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{m}{n}$.

Відповідь: $\dfrac{m}{n}$.

34. В осьовому перерізі бачимо рівнобічну трапецію, описану навколо кола.



$S_{\text{кул.}} = 4\pi R^2 = m$. $S_{\text{кон.}} = \pi l(R_1 + R_2) + \pi\left(R_1^2 + R_2^2\right) = S$.

$R_1 + R_2 = l$, $R^2 = R_1R_2$.

$R_1^2 + R_2^2 = (R_1 + R_2)^2 - 2R_1R_2 = l^2 - 2R^2$.

$\pi l^2 + \pi(l^2 - 2R^2) = S$; $2\pi(l^2 - R^2) = S$.

$l = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$; $2\pi\left(\dfrac{4R^2}{\sin^2\alpha} - R^2\right) = S$;

$2\pi R^2\left(\dfrac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right) = S$, а $2\pi R^2 = \dfrac{m}{2}$, отже,

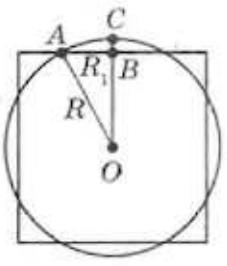
$\dfrac{4}{\sin^2\alpha} - 1 = \dfrac{2S}{m}$; $\dfrac{4}{\sin^2\alpha} = \dfrac{2S + m}{m}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{4m}{2S + m}$; $\sin\alpha = 2\sqrt{\dfrac{m}{2S + m}}$;

$\alpha = \arcsin 2\sqrt{\dfrac{m}{2S + m}}$.

Відповідь: $\arcsin 2\sqrt{\dfrac{m}{2S + m}}$.

35. Розглянемо осьовий переріз. Площа поверхні тієї частини кулі, яка міститься всередині кулі, знаходиться як $S_{\text{кул.}} - 6S_{\text{сегм.}}$. $S_{\text{кул.}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$ см^2.

$S_{\text{сегм.}} = 2\pi R_1 H$. $R_1^2 = AO^2 - OB^2 = 6^2 - \left(\dfrac{10}{2}\right)^2 = 11$;



$R_1 = \sqrt{11}$ см.

$H = CB = 6 - \dfrac{10}{2} = 1$ см. $S_{\text{сегм.}} = 2\pi \cdot \sqrt{11}$ см^2.

$S = 144\pi - 6 \cdot 2\pi\sqrt{11} = 12\pi\left(12 - \sqrt{11}\right)$ см^2.

Відповідь: $12\pi\left(12 - \sqrt{11}\right)$ см^2.

36. Розглянемо осьовий переріз і добудуємо симетричний йому відносно площини основ. $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$ — спирається на діаметр. Отже, маємо квадрат зі стороною l_1 і діагоналлю $2R_1$, вписаний у коло $(0; R)$ і квадрат зі стороною l_2 і діагоналлю $2R_2$, описаний навколо цього кола.

aldz.net

Треба довести, що: $S_{\text{півк.}} = \sqrt{S_{\text{б. кон.1}} \cdot S_{\text{б. кон.2}}}$.

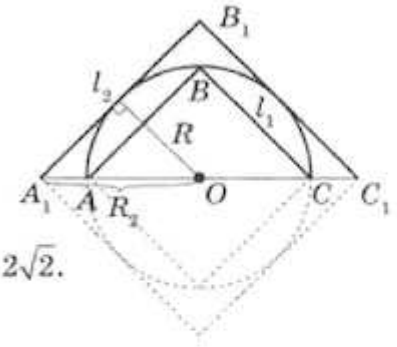
$S_{\text{півк.}} = 4\pi R^2 : 2 = 2\pi R^2$.

1) $S_{\text{б. кон.1}} = \pi R_1 l_1$, де $R_1 = R$, $l_1 = R\sqrt{2}$;

$S_{\text{б. кон.1}} = \pi R^2 \sqrt{2}$.

2) $S_{\text{б. кон.2}} = \pi R_2 l_2$, де $R_2 = R\sqrt{2}$; $l_2 = 2R$; $S_{\text{б. кон.2}} = \pi R^2 \cdot 2\sqrt{2}$.

Маємо: $2\pi R^2 = \sqrt{\pi R^2 \sqrt{2} \cdot \pi R^2 \cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{4\pi^2 R^4}$.



37. Розглянемо куб з ребром a, в який вписано сферу $(O_1; R)$, де $R = \frac{a}{2}$.

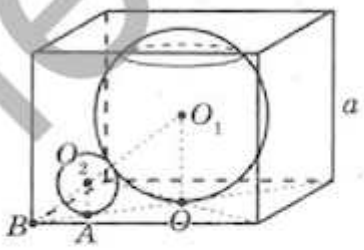
Сфера $(O_2; r)$ дотикається до трьох граней куба і до першої сфери.
Нехай B — вершина тригранного куба, до граней якого дотикається ця сфера, а A і O — точки дотику до основи куба.

$$\Delta BOO_1 \sim \Delta BAO_2 \Rightarrow \frac{OO_1}{O_2A} = \frac{BO_1}{BO_2};\quad BO_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2};\quad \frac{R}{r} = \frac{a\sqrt{3}}{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - R - r\right)};$$

$$\frac{a}{2r} = \frac{a\sqrt{3}}{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} - r\right)};\quad \frac{a}{2r} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3} - a - 2r};\quad a\sqrt{3} - a - 2r = 2r\sqrt{3};$$

$$2r\left(1 + \sqrt{3}\right) = a\left(\sqrt{3} - 1\right);\quad r = \frac{a\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{a\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{4};$$

$$S_{\text{сф.}} = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{a^2\left(\sqrt{3} - 1\right)^4}{16} = \pi a^2\left(7 - 4\sqrt{3}\right).$$

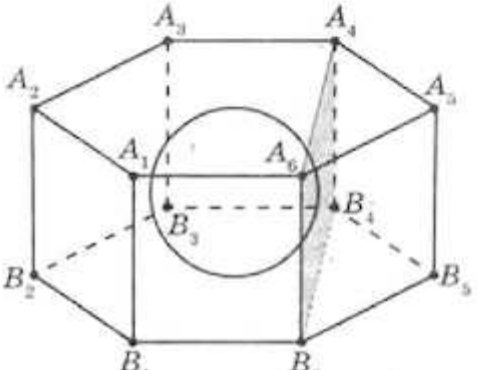


Відповідь: $\pi a^2\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$.

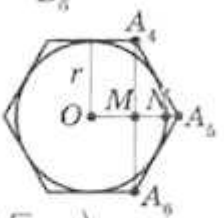
38. Розглянемо сферу, вписану в правильну шестикутну призму.
Площина, яка проведена через бічне ребро, ділить дану призму на дві призми з однаковими висотами. Тому з того, що їх об'єми відносяться як 1 : 5, випливає, що площі їх основ відносяться як 1 : 5. Якщо відрізок з кінцем у вершині шестикутника ділить його площу у відношенні 1: 5, то він співпадає з меншою діагоналлю шестикутника:

$$S_{A_1 \ldots A_6} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2};\quad S_{A_1A_5A_6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Отже, $6 \cdot S_{A_1A_5A_6} = S_{A_1 \ldots A_6}$.



Тепер розглянемо перпендикулярний переріз.
$A_4A_5 = A_5A_6 = a$ — сторона шестикутника, тоді



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2};\quad a = \frac{2r}{\sqrt{3}};\quad OM = \frac{r}{\sqrt{3}} \text{ і } H_1 = MN = r - \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3} - r}{\sqrt{3}} = \frac{r\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3}};$$

$$H_2 = 2r - \frac{r\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3}} = \frac{r\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\sqrt{3}},$$

де H_1 і H_2 — висоти відповідних сферичних сегментів.

aldz.net

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{2\pi RH_2}{2\pi RH_1}=\frac{H_2}{H_1}=\frac{r\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}}:\frac{r\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}=$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}.$$

Відповідь: $\left(2+\sqrt{3}\right):1$.

§ 26. Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції. Формула Сімпсона

$V=\int\limits_a^b f^2(x)dx$; $V=\frac{b-a}{6}\left(S_{\text{нижн. осн.}}+4S_{\text{с.}}+S_{\text{верх. осн.}}\right)$ — формула Сімпсона.

Завдання 23

1. $x=0$; $x=8$; $y=0$; $y=2x+1$. $V=\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

$$V=\int\limits_0^8(2x+1)^2dx=\frac{1}{6}(2x+1)^3\Big|_0^8=\frac{1}{6}(17^3-1^3)=\frac{4912}{6}=\frac{2456}{3}=818\frac{2}{3}\text{ куб. од.}$$

Відповідь: $818\frac{2}{3}$ куб. од.

2. $x=1$; $x=4$; $y=0$; $y=6x^2+1$.

$$V=\int\limits_1^4(6x^2+1)^2dx=\int\limits_1^4(36x^4+12x^2+1)dx=\frac{36x^5}{5}+4x^3+x\Big|_1^4=$$

$$=\frac{36\cdot1024}{5}+4\cdot64+4-\frac{36}{5}-4-1=\frac{36\cdot1023}{5}+255=7365\frac{3}{5}+255=$$

$=7620{,}6$ куб. од.

Відповідь: 7620,6 куб. од.

3. $x=0$; $x=\frac{\pi}{2}$; $V=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-0-\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{\pi}{4}\text{ куб. од.}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$ куб. од.

4. 1) $V=\int\limits_a^b x^2(y)dy$; $x=\sqrt{y}$. $V=\int\limits_0^1 ydy=\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

2) $V=\int\limits_0^1 y^2dy=\frac{y^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$ куб. од.; 2) $\frac{1}{3}$ куб. од.

5. $x^2+(y-5)^2=4$.

$$V=8\pi\cdot5\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}dx\left|\begin{array}{l}x=2\sin t\\x=0,\ t=0\\x=2,\ t=\frac{\pi}{2}\\dx=2\cos tdt\end{array}\right|=40\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot2\cos tdt=160\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 tdt=$$

aldz.net

$$= 80\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = 80\pi\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 80\pi\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0-\sin 0\right) = 80\pi\cdot\frac{\pi}{2} = 40\pi^2.$$

Відповідь: $40\pi^2$.

6. $V = \frac{b-a}{6}\ (S_{\text{нижн. осн.}} + 4S_c + S_{\text{верхн. осн.}})$.

$a = 0;\ b = 12;\ S_{\text{нижн. осн.}} = \pi R_1^2 = \pi;\ S_{\text{верхн. осн.}} = \pi R_2^2 = 16\pi.$

$\frac{12-0}{6}(\pi + 4S_c + 16\pi) = 600;\ 17\pi + 4S_c = 300;\ S_c = \frac{300-17\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{300-17\pi}{4}$ см^2.

Перевір себе. Повторення курсу геометрії в тестовій формі

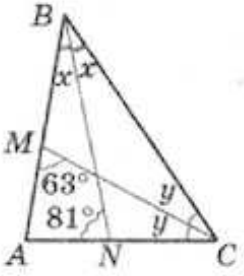
1. Сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°. Нехай x — коефіцієнт пропорційності, тоді $2x + 3x + 4x = 360°$; $x = 40°, 80°, 120°, 160°$ — зовнішні кути, а $180° - 80° = 100°$, $180° - 120° = 60°$, $180° - 160° = 20°$ — внутрішні.
Відповідь: Б.

2. Правильними є твердження 1; 4; 5.
Відповідь: В.

3. Сума двох інших кутів трикутника $180° - 48° = 132°$. Отже, сума половин цих кутів $132° : 2 = 66°$, а зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, які не суміжні з ним, отже, шуканий кут 66°.
Відповідь: Г.

4. ABC — даний трикутник, BN, CM — бісектриси.
Нехай $\angle ABC : 2 — x$, а $\angle BAC : 2 — y$, тоді:
з ΔBNC: $x + 2y = 81$; з ΔBMC: $2x + y = 63$;

$\begin{cases} x + 2y = 81, \\ 2x + y = 63; \end{cases}\ \begin{cases} y = 33°, \\ x = 15°. \end{cases}$ Отже, $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$, $\angle A = 84°$.



Відповідь: Г.

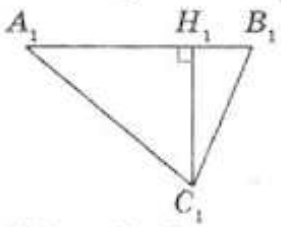
5. $A_1, B_1, A, B \in A_1B$; $C_1C \parallel A_1B$.

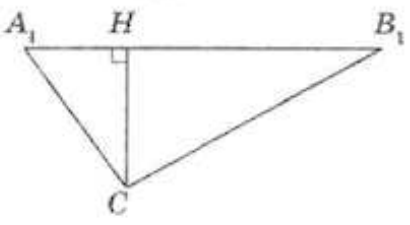
$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot C_1H_1$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$.

$2 \cdot A_1B_1 = AB$, $H_1C_1 = HC$,

тому $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = 2$.





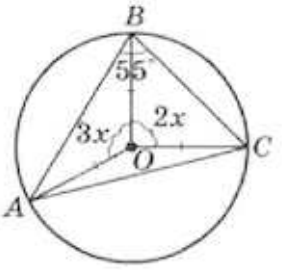
Відповідь: В.

6. 1) Хибне (не виконується нерівність трикутника).
2) Правильне.
3) Правильне (виконується нерівність трикутника).
4) Хибне (сторони дорівнюють 1 см, 4 см, 5 см, але $1 + 4 \not> 5$).
5) Правильне (суми протилежних кутів повинні бути однаковими).
6) Хибне (суми протилежних сторін повинні бути однаковими).

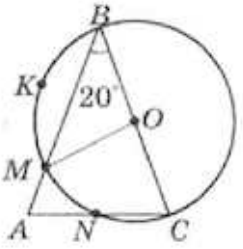
alg7.net

Відповідь: Б.

7. Нехай ABC — даний трикутник, вписаний у коло з центром O. $\angle B = 55°$, x — коефіцієнт пропорційності, $\angle BOC$ — $2x$, $\angle AOB$ — $3x$.
ΔAOB і ΔBOC — рівнобедрені ($AO = BO = CO = R$), тому $\angle BAO + \angle BCO = \angle ABO + \angle CBO = 55°$.
З ΔAOB і ΔCOB маємо:
$2 \cdot 55° + 2x + 3x = 2 \cdot 180°$; $x = 50°$.
Отже, $\angle BOC = 2 \cdot 50° = 100°$, $\angle AOB = 3 \cdot 50° = 150°$.
Відповідь: А.

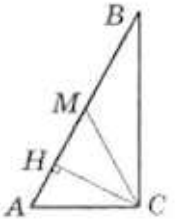


8. Нехай ABC — даний рівнобедрений трикутник ($AB = BC$).
$\angle ABC = 20°$, тому $\angle MOC = 40°$ (спирається на одну $\cup MNC$).
$\cup BNC = 180°$, $\cup MNC = 40°$, отже, $\cup AKB = 140°$.
$\angle BCA = (180° - 20°) : 2 = 80°$, $\cup BMN = 2 \cdot 80° = 160°$.
$\cup MN = 160° - 140° = 20°$, $\cup NC = 40° - 20° = 20°$.
Відповідь: Д.



9. $\cup BMD = 130°$, тому $\angle BOD = 130°$, $\angle ABO = \angle ADO = 90°$ (AB і AD — дотичні).
$\angle BAD = 360° - 130° - 2 \cdot 90° = 50°$, $\angle CO_1K = 100°$ (як центральний кут, який спирається на ту саму дугу), $\cup CNK = 100°$.
Відповідь: В.

10. Нехай ABC ($\angle C = 90°$) — даний трикутник. $BC \perp AC$, $AC \perp BC$, $CH \perp AB$, тому вершина C є точкою перетину висот ΔABC. Центром кола, описаного навколо ABC, є точка M — основа медіани, що проведена до гіпотенузи, тому MC — шукана відстань. $MC = AB : 2 = 16 : 2 = 8$ м.
Відповідь: Г.



11. Нехай ABC — даний трикутник.
Позначимо його сторони AB — $2x$, BC — $3x$, AC — $4x$.
Побудуємо ΔADC, симетричний ΔABC відносно AC:

$$\frac{S_{\text{півкр.}}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\text{кр.}}}{S_{ABCD}},$$

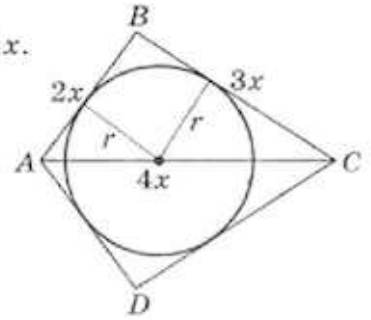
$$p_{ABC} = \frac{3x + 4x + 2x}{2} = 4{,}5x;$$

$$S_{ABC} = \sqrt{4{,}5x \cdot 1{,}5x \cdot 2{,}5x \cdot 0{,}5x} = 0{,}75x^2\sqrt{15}.$$

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 1{,}5x^2\sqrt{15};\ S_{\text{чотир.}} = rp;\ S_{\text{кр.}} = \pi r^2;\ r = \frac{S_{ABCD}}{p_{ABCD}} = \frac{1{,}5x^2\sqrt{15}}{5x} = \frac{3x\sqrt{15}}{10}.$$

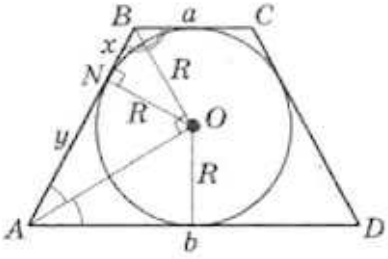
$$\frac{S_{\text{кр.}}}{S_{ABCD}} = \frac{\pi r^2}{rp} = \frac{\pi r}{p} = \frac{3x\sqrt{15}\pi}{10 \cdot 5x} = \frac{3\pi\sqrt{15}}{50}.$$

Відповідь: А.



12. Якщо у рівнобічній трапеції діагоналі взаємно перпендикулярні, то її площа дорівнює квадрату середньої лінії. Отже, $S = h^2 = 5^2 = 25$ см^2.
Відповідь: Б.

13. Нехай $ABCD$ — дана трапеція ($AB = CD$).
Позначимо основи за a і b. $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$.
З ΔAOB: $\angle AOB = 90°$, R — його висота,
тоді $R = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, $C = 2\pi R = \pi\sqrt{ab}$.



alldz.net

$AB + CD = BC + AD$ (в трапецію вписане коло),

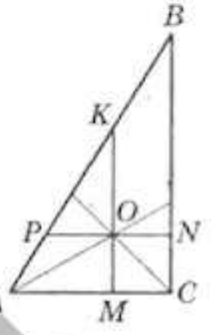
тому $P_{тр.} = 2(a + b)$ і $\dfrac{C}{p} = \dfrac{\pi\sqrt{ab}}{2(a+b)}$.

$S_{кр.} = \pi R^2 = \dfrac{\pi ab}{4}$. $S_{тр.} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$, $h = \sqrt{ab}$; $S_{тр.} = \dfrac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$.

$\dfrac{S_{кр.}}{S_{тр.}} = \dfrac{\pi ab \cdot 2}{4(a+b)\sqrt{ab}} = \dfrac{\pi\sqrt{ab}}{2(a+b)}$. Отже, $\dfrac{C}{p} : \dfrac{S_{кр.}}{S_{тр.}} = 1 : 1$.

Відповідь: Г.

14. Нехай ACB — даний трикутник ($\angle C = 90°$). O — точка перетину його бісектрис, $MK \parallel BC$, $PN \parallel AC$. $MO = ON = r$, тому $MONC$ — квадрат.



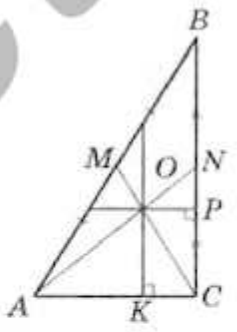
$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$; $AB = 10$.

$r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{6 + 8 - 10}{2} = 2$. $S_{MONC} = 2^2 = 4$ (см²).

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см²). $\dfrac{S_{MONC}}{S_{ABC}} = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$.

Відповідь: В.

15. Нехай ABC — даний трикутник. $\angle C = 90°$. O — точка перетину медіан і $KO \parallel BC$, $PO \parallel AC$. Медіани при перетині діляться у відношенні 2 : 1, починаючи з вершини. А відрізки прямих, паралельних сторонам трикутника, що проходять через цю точку, зберігають це відношення.



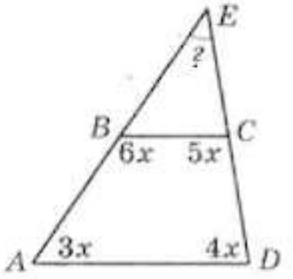
Тому $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{2}{1}$.

Нехай $KC = x$, $PC = y$, $AC = 3x$, $BC = 3y$.

$S_{KOPC} = xy$; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{3x \cdot 3y}{2} = \dfrac{9xy}{2} = S$. $xy = \dfrac{2S}{9}$.

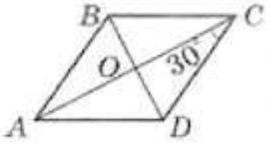
Відповідь: Г.

16. Нехай $ABCD$ — дана трапеція. Оскільки сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°, то до однієї бічної сторони прилягають кути $3x$ і $6x$, а до іншої — $4x$ і $5x$, тому кути, прилеглі до основи, дорівнюють $3x$ і $4x$. Складемо рівняння $3x + 6x + 5x + 4x = 360°$; $x = 20°$, отже, $\angle A = 60°$, $\angle D = 80°$, $\angle E = 180° - (60° + 80°) = 40°$.



Відповідь: В.

17. Нехай $ABCD$ — даний ромб. $BD = 4$ м, $\angle ACD = 30°$.



За властивістю діагоналей ромба $OD = 2$ м. $\angle COD = 90°$.

З ΔCOD: $\operatorname{tg} \angle OCD = \dfrac{OD}{OC}$; $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{2}{OC}$;

$OC = 2\sqrt{3}$; $AC = 4\sqrt{3}$. $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}$ м².

Відповідь: Г.

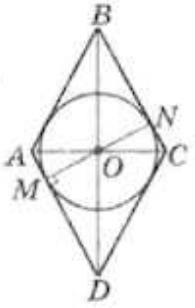
18. Нехай сторони правильного трикутника, чотирикутника і шестикутника дорівнюють a, тоді $S_{тр.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{кв.} = a^2$; $S_{шест.} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, тому

$S_{тр.} : S_{кв.} : S_{шест.} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} : 1 : \dfrac{3^2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$.

Відповідь: А.

all07.net

19. Нехай $ABCD$ — даний ромб. $AC = 6$ см, $BD = 8$ см.



$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ см^2 або $S_{ABCD} = AD \cdot MN$,

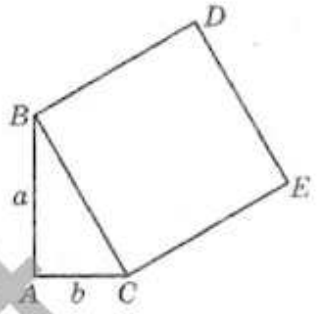
де MN — висота ромба. $MN = 2r$.

$$AD = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = 5.$$

Маємо: $24 = 5 \cdot 2r$, $r = 2{,}4$ см. $C = 2\pi r$; $C = 4{,}8\pi$ см.

Відповідь: Д.

20. Нехай ABC — даний трикутник, а $BDEC$ — квадрат, побудований на його гіпотенузі. Позначимо катети трикутника за a і b, тоді



$S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $S_{BDEC} = a^2 + b^2$.

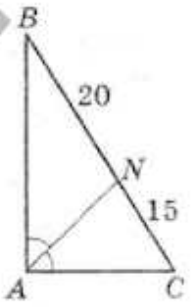
За умовою задачі $\frac{ab}{2(a^2 + b^2)} = k$. $\operatorname{tg} \angle C = \frac{a}{b}$;

$\operatorname{tg} \angle B = \frac{b}{a}$; $\operatorname{tg} \angle C + \operatorname{tg} \angle B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{1}{2k}$.

21. Нехай BAC — даний трикутник.

$\angle A = 90°$, AN — бісектриса, $NC = 15$ см, $BN = 20$ см.

Бісектриса кута трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.



Отже, $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

Позначимо AB за $4x$, а BC — за $3x$, тоді за теоремою Піфагора $(4x)^2 + (3x)^2 = 35^2$; $25x^2 = 1225$; $x^2 = 49$; $x = 7$.

$P = 35 + 28 + 21 = 84$ см.

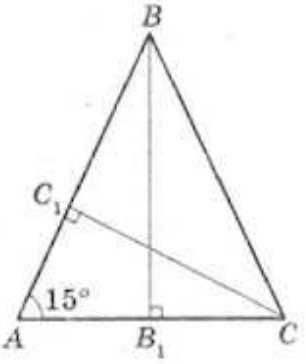
Відповідь: В.

22. Нехай ABC — даний трикутник.

$BA = BC$; $BB_1 \perp AC$; $CC_1 \perp AB$; $\angle A = 15°$.

ΔABC — рівнобедрений, тому $\angle C = \angle A = 15°$.

$\Delta BB_1C \sim \Delta CC_1A$ (за двома кутами), отже,



$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{2B_1C}{BC} = 2\cos \angle C = 2\cos 15° =$

$$= 2\sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}} = 2\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = 2\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Відповідь: Д.

23. S_1 — площа круга, вписаного в ΔABC. S_2 — площа круга, описаного навколо ΔABC. $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$. Спочатку доведемо нерівність $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$, де α, β, γ — кути трикутника.

За теоремою косинусів маємо: $a^2 = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos\alpha)$ або

$$a^2 = (b - c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Тому $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8}$.

Використовуємо формулу: $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

alez.net

Маємо: $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{R}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{4\cdot\frac{1}{8}}\right) = 4.$

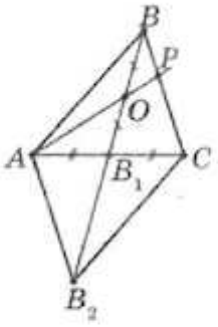
Відповідь: Г.

24. Розглянемо ΔABC.

BB_1 — медіана, O — середина BB_1, $O \in AP$.

Добудуємо ΔABC до паралелограма $ABCB_2$

і позначимо BO за x, тоді OB_1 — x, а B_1B_2 — $2x$.



$\Delta BOP \sim \Delta B_2OA \Rightarrow \frac{BO}{OB_2} = \frac{BP}{AB_2} = \frac{1}{3}$.

У свою чергу $AB_2 = BC$, тому $\frac{BP}{BC} = \frac{1}{3}$, а $\frac{BC}{BP} = 3$.

Відповідь: Д.

25. Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма. Отже, шукана сума дорівнює 180°.

Відповідь: В.

26. Нехай $ABCD$ — паралелограм.

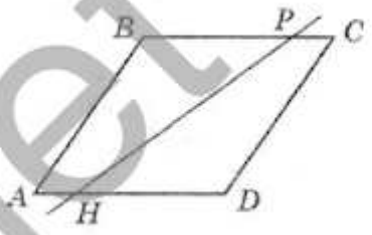
$P \in BC$, $H \in AD$; $AD = 6AH$; $S_{ABPH} : S_{PCDH} = 5 : 7$.

Позначимо AH за x, тоді $HD = 5x$, $BC = 6x$.

Пряма HP розбиває $ABCD$ на дві трапеції,

висоти яких однакові, тому

$S_{ABPH} : S_{PCDH} = (AH + BP) : (HD + PC)$, тому



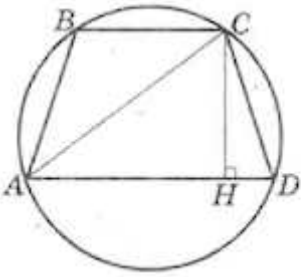
$\frac{x + BP}{5x + (6x - BP)} = \frac{5}{7}$; $12BP = 48x$; $BP = 4x$,

отже, $PC = 6x - 4x = 2x$; $\frac{BP}{PC} = \frac{4x}{2x} = 2$.

Відповідь: В.

27. Нехай $ABCD$ — дана трапеція, вписана в коло.

$AB = CD$, $BC = 5$ см, $AD = 9$ см, $AC = 9$ см.



Проведемо висоту CH: $HD = \frac{AD - BC}{2} = 2$ см,

$AH = AD - HD = 7$ см.

З ΔAHC: $HC^2 = AC^2 - AH^2 = 32$;

з ΔCHD: $CD^2 = CH^2 + HD^2 = 36$; $AB = CD = 6$ см.

Коло, описане навколо трапеції, є колом, описаним

навколо ΔABC зі сторонами 5 см, 6 см, 9 см. $R = \frac{abc}{4S_\Delta}$; $p = \frac{5 + 6 + 9}{2} = 10$;

$S_\Delta = \sqrt{10(10-5)(10-6)(10-9)} = 10\sqrt{2}$. $R = \frac{5\cdot 6\cdot 9}{40\sqrt{2}} = \frac{27}{4\sqrt{2}} = \frac{27\sqrt{2}}{8}$ см.

Відповідь: Г.

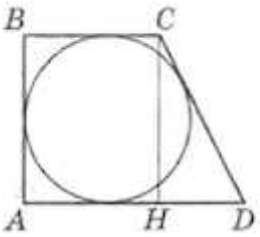
28. Нехай $ABCD$ — дана трапеція. $AB \perp AD$; $BC \parallel AD$, $BC = 5$ м, $AD = 7$ м.

Проведемо висоту CH : $HD = AD - BC = 2$ м.

Оскільки коло вписане в трапецію,

$AB + CD = BC + AD = 12$ м.

Позначимо AB за x, тоді $CD = 12 - x$, $CH = AB = x$.

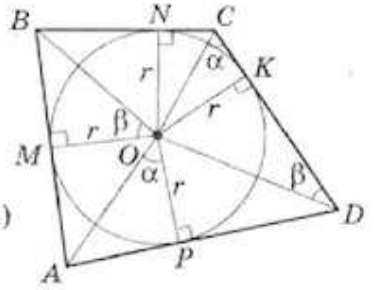


З ΔCHD: $CH^2 + HD^2 = CD^2$; $x^2 + 2^2 = (12 - x)^2$; $x = \frac{35}{6}$ м.

Відповідь: Г.

ald.net

29. Розглянемо чотирикутник $ABCD$, описаний навколо кола $(0; r)$.
M, N, K, P — точки дотику. Оскільки навколо нього можна описати коло, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.
Позначимо $\angle KDO$ — β, тоді $\angle MBO = 90° - \beta$, а $\angle BOM = \beta$.



ΔOKD: $\sin\beta = \frac{r}{OD}$. ΔBMO: $\cos\beta = \frac{r}{OB} = \frac{r}{2\sqrt{5}}$.

Оскільки $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, маємо $\frac{r^2}{OD^2} + \frac{r^2}{20} = 1$. (1)

Аналогічно, якщо $\angle OCK = \alpha$, то $\angle AOP = \alpha$.

ΔCKO: $\sin\alpha = \frac{r}{OC} = \frac{r}{2\sqrt{3}}$; ΔAPO: $\cos\alpha = \frac{r}{AO} = \frac{r}{\sqrt{30}}$, тоді з того, що

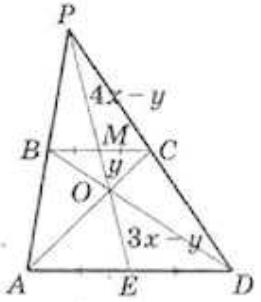
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, маємо $\frac{r^2}{12} + \frac{r^2}{30} = 1$; $\frac{1}{r^2} = \frac{7}{60}$. Підставимо r^2 в (1):

$r^2\left(\frac{20 + OD^2}{20 \cdot OD^2}\right) = 1$; $\frac{20 + OD^2}{20 \cdot OD^2} = \frac{7}{60}$; $1200 + 60 \cdot OD^2 = 140 \cdot OD^2$;

$80 \cdot OD^2 = 1200$; $OD^2 = 15$; $OD = \sqrt{15}$.
Відповідь: Д.

30. ГМТ, рівновіддалених від точки і прямої, є парабола, у якої дана точка називається фокусом, а пряма — директрисою.
Відповідь: Д.

31. Розглянемо трапецію $ABCD$. M і E — середини її основ, O — точка перетину діагоналей, а P — точка перетину бічних сторін. $ME = 0{,}75 \cdot OP$. Точки P, M, O і E лежать на одній прямій, отже:



$\frac{AD}{BC} = \frac{PE}{PM} = \frac{OE}{OM}$ ($\Delta BPC \sim \Delta APD$, $\Delta BOC \sim \Delta DOA$).
Позначимо ME — $3x$, OP — $4x$, а OM — y, тоді маємо:
$PM = 4x - y$, $OE = 3x - y$

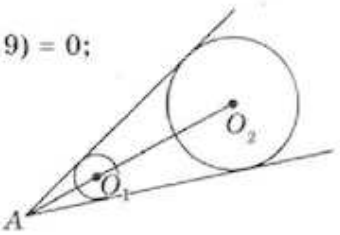
і $\frac{7x - y}{4x - y} = \frac{3x - y}{y}$ або $\frac{7 - \frac{y}{x}}{4 - \frac{y}{x}} = \frac{3 - \frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}$, звідки $\frac{y}{x} = 1$ або $\frac{y}{x} = 6$.

$\frac{y}{x} = 6$ не задовольняє умову, отже, $y = x$ і $\frac{AD}{BC} = \frac{7x - x}{4x - x} = \frac{6x}{3x} = 2$.
Відповідь: В.

32. Поворот точок на кут α відносно точки $(x_0; y_0)$ здійснюється за формулами:
$x_1 = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha$; $y_1 = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha$.
Виберемо на заданій прямій дві довільні точки, наприклад, $A(5; 2)$ і $B(6; -1)$ (їх координати повинні задовольняти рівняння прямої).
Маємо: $A(5; 2) \to A'(-1; 3)$; $B(6; 1) \to B'(2; 4)$.

Тепер запишемо рівняння прямої $A'B'$ $\frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y - 3}{4 - 3}$: $x - 3y + 10 = 0$.

33. Перетворимо рівняння кіл:
$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$; $(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) = 0$;
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$.
Коло з центром $O_1(2; -3)$ і $R_1 = 2$.
$x^2 + y^2 + 14y + 13 = 0$;
$x^2 + (y^2 + 14y + 49) - 49 + 13 = 0$;
$x^2 + (y + 7)^2 = 36$.



aldz.net

Коло з центром $O_2(0; -7)$ і $R_2 = 6$. $k = \frac{R_2}{R_1} = 3$.

Центр гомотетії $A(x; y)$ повинен задовольняти такі умови: $A \in O_1O_2$; $AO_2 = 3AO_1$ і A лежить з одного боку від O_1 і O_2 $(k > 0)$.

Рівняння прямої O_1O_2: $\frac{x-2}{0-2} = \frac{y+3}{-7+3}$; $2x - y = 7 = 0$. $AO_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$;

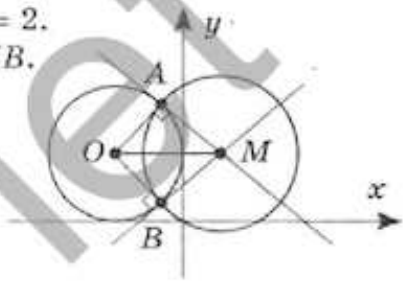
$AO_2 = \sqrt{x^2 + (y+7)^2}$, отже, $\sqrt{x^2 + (y+7)^2} = 3\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} y = 2x - 7, \\ x^2 + (y+7)^2 = 9((x-2)^2 + (y+3)^2); \end{cases}$

$x^2 + (2x)^2 = 9((x-2)^2 + (2x-4)^2)$; $5x^2 = 9(5x^2 - 20x + 20)$;
$40x^2 - 180x + 180 = 0$; $2x^2 - 9x + 9 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}5$ — не задовольняє умову $k > 0$. Отже, $x = 3$; $y = -1$. $(3; -1)$.
Відповідь: Д.

34. $x^2 + y^2 = 9$ — коло з центром $O(0; 0)$ і $R = 3$. З віссю абсцис коло перетинається в точках $(3; 0)$ і $(-3; 0)$ і має вертикальні дотичні $x = 3$ і $x = -3$.
Відповідь: Б і Г.

35. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ — коло з центром $O(-2; 2)$ і $R = 2$.
Через т. $M(1; 2)$ можна провести дві дотичні MA і MB.



Знайдемо відстань MA і MB:
$MA^2 = MO^2 - AO^2$; $MO = \sqrt{(1+2)^2 + (2-2)^2} = 3$;
$AO = R = 2$.
$MA^2 = 3^2 - 2^2 = 5$. Точки A і B є точками перетину кіл $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ і $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Розв'яжемо систему: $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5; \end{cases}$ $(x+2)^2 - (x-1)^2 = -1$; $x = -\frac{2}{3}$;

$(y-2)^2 = 5 - \left(-\frac{2}{3} - 1\right)^2$; $(y-2)^2 = \frac{20}{9}$; $y = 2 \pm \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

$B\left(-\frac{2}{3}; 2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$; $A\left(-\frac{2}{3}; 2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$.

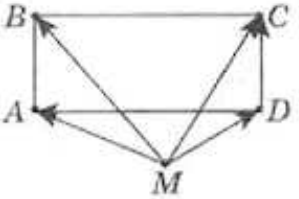
Запишемо рівняння прямої:

MB: $\frac{x-1}{-\frac{2}{3}-1} = \frac{y-2}{2-\frac{2\sqrt{5}}{3}-2}$; $\frac{x-1}{-\frac{5}{3}} = \frac{y-2}{-\frac{2\sqrt{5}}{3}}$; $\frac{x-1}{\sqrt{5}} = \frac{y-2}{2}$; $2x - 2 - \sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = 0$;

MA: $\frac{x-1}{-\frac{2}{3}-1} = \frac{y-2}{2+\frac{2\sqrt{5}}{3}-2}$; $\frac{x-1}{-\frac{5}{3}} = \frac{y-2}{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$; $\frac{x-1}{-\sqrt{5}} = \frac{y-2}{2}$; $2x - 2 + \sqrt{5}y - 2\sqrt{5} = 0$.

Відповідь: А і Г.

36. Розглянемо прямокутник $ABCD$, $M \in (ABCD)$.



$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) =$

$= |\overrightarrow{MD}|^2 + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} +$

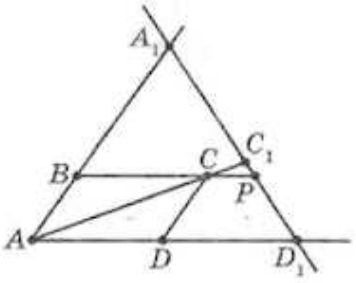
$+ \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{MD}|^2 + \overrightarrow{MD}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$ ($\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, тому що $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC}$) =

alaz.net

$= |MD| + MD \cdot DB = MD(MD + DB) = MD \cdot MB = 3.$

Відповідь: Б.

37. Розглянемо паралелограм $ABCD$. Продовжимо BC до перетину з B_1D_1.
P — точка перетину.



$\Delta AD_1B_1 \sim \Delta BPB_1$; $\frac{AB_1}{BB_1} = \frac{AD_1}{BP} = \frac{3}{2}$.

Позначимо $AD_1 = 3x$, а $BP = 2x$,

тоді $AD = \frac{1}{2} AD_1 = 1{,}5x$; $CB = 1{,}5x$.

$CP = BP - BC = 2x - 1{,}5x = 0{,}5x$.

$\Delta AD_1C_1 \sim \Delta CPC_1$; $\frac{AD_1}{CP} = \frac{AC_1}{CC_1} = \frac{3x}{0{,}5x} = 6$.

$AC_1 = 6 \cdot CC_1$; $AC = AC_1 - CC_1 = 5CC_1$; $\frac{AC_1}{AC} = \frac{6}{5}$.

Відповідь: Г.

38. А) — 6. Б) — 3, 5. В) — 2, 3. Г) — 2, 3, 4, 5, 6. Д) — 2, 3, 4, 5, 6.

39. А) — 2, 3, 4, 5. Б) — 7. Г) — 2, 3, 4, 5. Д) — 3.

40. А) — 2. Б) — 3. В) — 4. Г) — 2. Д) — 2.

41. А) — 3, 6. Б) — 2, 6. В) — 3, 6. Г) — 3, 5, 6. Д) — 3, 5, 6. Е) — 3, 6. Є) — 2, 3, 4, 5, 6.

42. А) — 3. Б) — 1. В) — 4. Г) — 4. Д) — 5.

43. А) — 8. Б) — 4. В) — 3, 4. Г) — 7. Д) — 5. Е) — 1.

44. А) — 4, 8. Б) — 4. В) — 2, 4, 7. Г) — 3. Д) — 4, 6. Е) — 5.

45. 1) Концетричне коло.
2) Коло, діаметром якого є гіпотенуза, крім двох точок — кінців діаметра.
3) Серединний перпендикуляр до відрізка, що з'єднує ці точки.
4) Коло з центром у цій точці а радіусом, рівним даному.

46. 1) Він — ромб.
2) Або прямокутник, або рівнобедрена трапеція.
3) Його сторони попарно рівні.
4) Цей чотирикутник можна вписати в коло.
5) Він — квадрат.

47. 1) 3 — медіани трикутника.
2) Безліч — усі діаметри кола.
3) 2 взаємно перпендикулярні прямі, що є бісектрисами утворених кутів.
4) 4 — діагоналі і дві прямі, які паралельні сторонам квадрата і проходять через його центр.
5) 6 — 3 діагоналі, що проходять через центр і 3 серединних перпендикуляри до його сторін.

Повторюємо курс стереометрії за 10 клас

48. 1) Якщо чотири точки лежать на одній прямій, то через цю пряму і п'яту точку можна провести площину, а це суперечить умові, — хибне.
2) Хибне, тому що він може лежати на прямій, яка перетинає цю площину.
3) Коло вписане в чотирикутник, отже, вони лежать в одній площині — правильне.
4) Правильне.
5) AB — середня лінія $\Delta KLM \Rightarrow AB \parallel MK$, $CD \parallel MK$, тому D — середина NK — правильне.
Відповідь: В.

gdz.net

49. 1) Якщо $a \parallel b$, то $a \in \alpha$, $b \not\in \alpha$, а $c \parallel \alpha$ — хибне.
2) Якщо вони не перетинаються і не лежать в одній площині — хибне.
3) $\alpha \cap \beta = a$, а в кожній площині можна провести безліч прямих, які паралельні даній, — правильне.
4) Правильне.
5) Правильне.
Відповідь: В.

50. 1) Якщо середини п'яти сторін шестикутника належать одній площині, то і всі сторони шестикутника належать цій площині, отже, і середина шостої — правильне.
2) Нехай A, B, $C \in \alpha$, $D \not\in \alpha$. M — середина AB, N — середина $BC \Rightarrow MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2} AC$.
A, C, $D \in \beta$, $B \not\in \beta$. P — середина AD, Q — середина $CD \Rightarrow PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{1}{2} AC$.
Отже, $MNPQ$ — паралелограм — правильне.
3) Правильне.
4) Нехай a і b — мимобіжні і $c \parallel a$, $c \parallel b$, тоді $a \parallel b$, а це суперечить тому, що вони мимобіжні — хибне.
5) Правильне.
Відповідь: Г.

51. $\Delta ADB = \Delta CDB$, отже, центри кіл O_1 і O_2 лежать на однаковій відстані від AC.
Відповідь: Б.

52. Якщо шукана площина збігається з площиною трикутника, то вона не паралельна жодній зі сторін.
Відповідь: А.

53. Паралельна, якщо не збігається з площиною ABC.
Відповідь: А.

54. $b \subset \alpha$, $a \perp b \Rightarrow a \perp \alpha$.
Відповідь: 1.

55. $a \parallel \alpha$, $b \perp a \Rightarrow b \perp \alpha$.
Відповідь: 3.

56. 1) Хибне; 2) хибне; 3) хибне; 4) хибне; 5) хибне.

57. 1) Хибне; 2) хибне; 3) хибне; 4) правильне; 5) хибне.
Відповідь: 4

58. 1) Правильне; 2) правильне; 3) правильне; 4) правильне; 5) хибне.
Відповідь: 1, 2, 3, 4.

59. 1) Виконується не завжди (прямі a і b мимобіжні або співпадають); 2) хибне; 3) правильне; 4) правильне; 5) виконується не завжди.
Відповідь: 3, 4.

60. 1) Правильне; 2) правильне, якщо площини не співпадають; 3) правильне; 4) хибне; 5) правильне.
Відповідь: 1, 2, 3, 5.

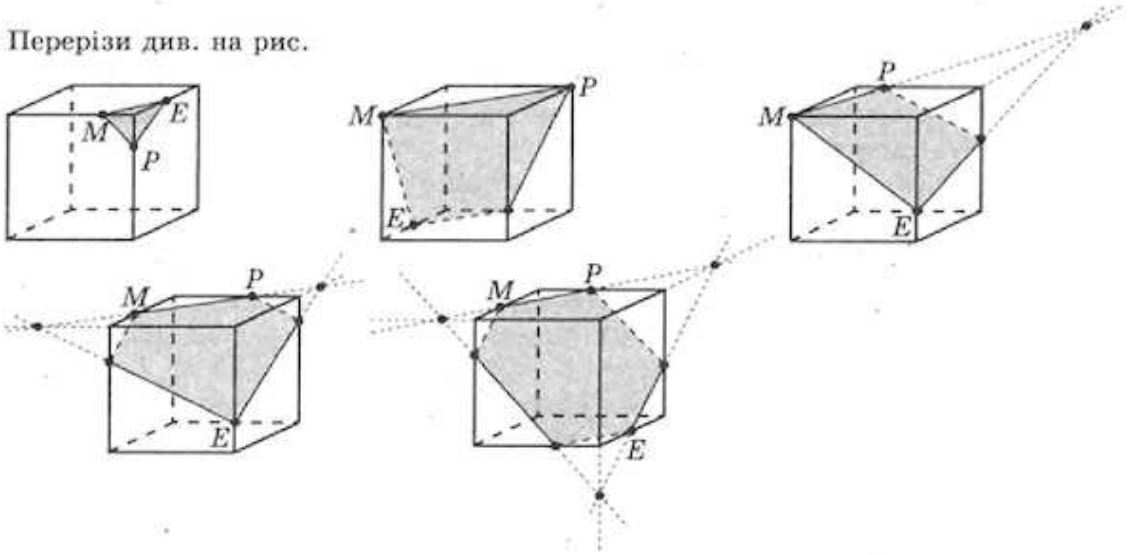
61. 1) Хибне; 2) хибне ($S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\alpha$, $|\cos\alpha| \le 1$); 3) правильне; 4) правильне;

alldz.net

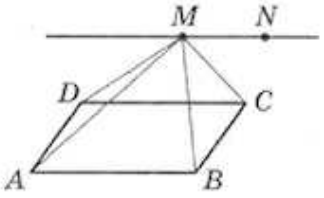
5) хибне.

Відповідь: 3, 4.

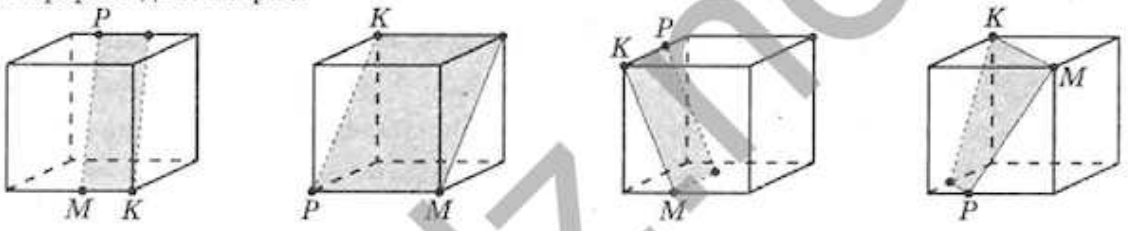
62. Перерізи див. на рис.



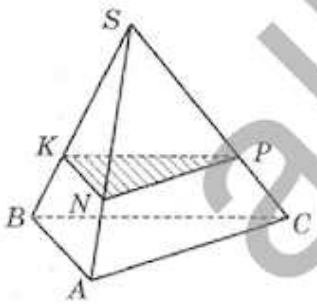
63. $MN \parallel AB \parallel CD$.



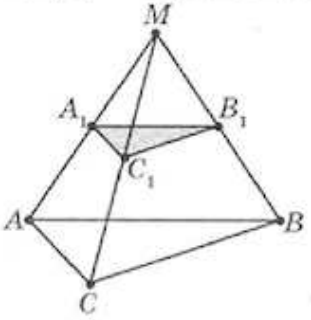
64. Перерізи див. на рис.



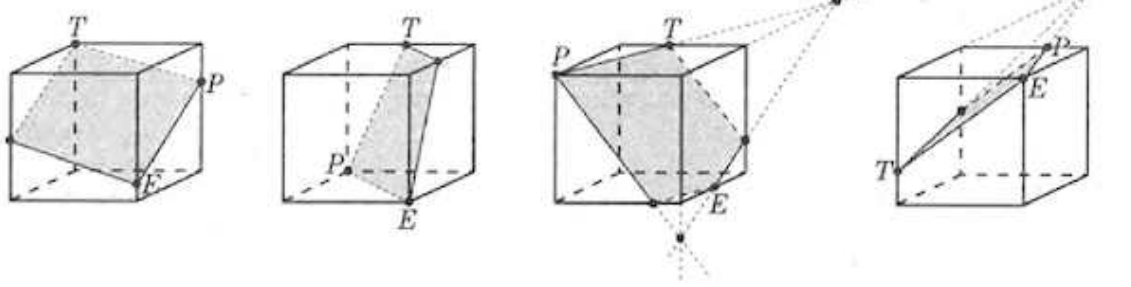
65. $MK : KB = MN : NA = MP : PC = 2 : 1$.



66. Нехай C_1 — середина MC.
$C_1B_1 \parallel CB \Rightarrow B_1$ — середина MB.
$A_1C_1 \parallel AC \Rightarrow A_1$ — середина AM.
$A_1B_1C_1$ — шукана площина.

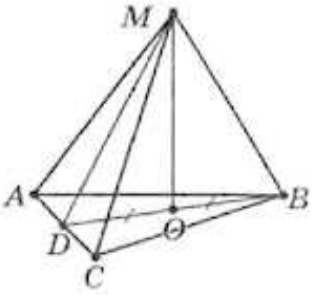


67. Перерізи див. на рис.

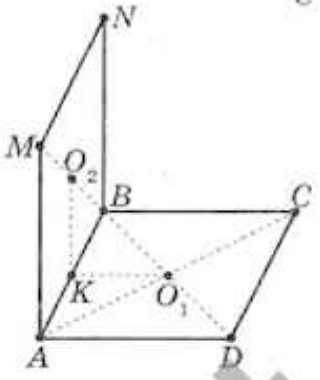


alldz.net

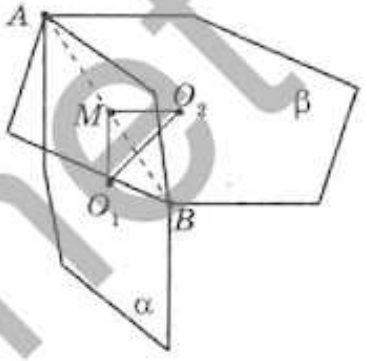
68. Розглянемо правильні трикутники ABC і ABM зі спільною стороною AB. Оскільки $P_{ABC} = P_{ABM} = 18$ см, то $AB = BC = AC = AM = BM = CM = 6$ см.
Проведемо MD і CD (D — середина AB),
$MD = DC = MC = 3\sqrt{3}$ см.
Отже, ΔMDC — рівносторонній і MO є його висотою і медіаною. $MO \perp (ABC)$.



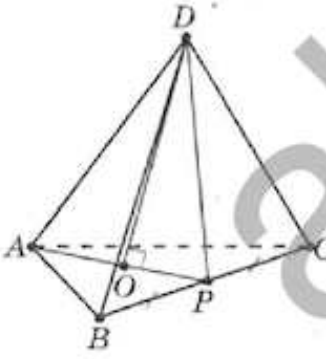
69. Розглянемо два квадрати зі спільною стороною AB, O_1 і O_2 — їх центри. Нехай K — середина AB, проведемо O_2K і O_1K. Оскільки периметри квадратів по 24 см, то їх сторони по 6 см і $O_2K = O_1K = 3$, а $O_1O_2 = 3\sqrt{2}$ см за умовою. Отже, $O_2K^2 + O_1K^2 = O_1O_2^2$, тому $\angle O_2KO_1 = 90°$.
$MA \perp (ABCD)$, $NB \perp (ABCD)$, $DA \perp (ABNM)$, $CB \perp (ABNM)$.



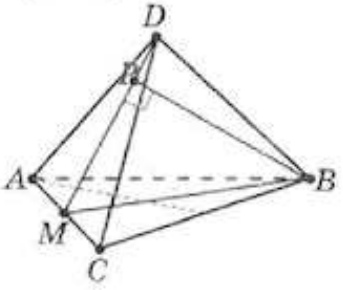
70. Розглянемо два правильних шестикутники зі спільною малою діагоналлю AB.
Оскільки їх периметри по 48 см, то $a = 48 : 6 = 8$ см. Позначимо M — середину AB, O_1, O_2 — центри шестикутників, тоді $MO_2 = MO_1 = 4$ см, а $O_1O_2 = 4\sqrt{2}$ см за умовою, отже, $MO_1^2 + MO_2^2 = O_1O_2^2$, тому $\angle O_1MO_2 = 90°$. $O_2M \perp \alpha$, $O_1M \perp \beta$.



71. Розглянемо правильний тетраедр $ABCD$.
P — середина BC, O — середина AP.
$DO \perp (ABC) \Rightarrow (APD) \perp (ABC)$.



72. Розглянемо правильний тетраедр $ABCD$.
M — середина AC.
$BP \perp MD \Rightarrow BP \perp (ADC) \Rightarrow (BMD)$ і (ADC).



73. 1) Усі прямі, що перпендикулярні до даної прямої і проходять через дану на ній точку, утворюють площину, перпендикулярну до даної прямої, якій належить дана точка.
2) Усі вершини рівнобедрених трикутників зі спільною основою AB утворюють площину, перпендикулярну до AB, що проходить через середину AB.
3) Усі точки, віддалені від площини α на a, утворюють дві площини, паралельні α, які знаходяться по різні боки від α на відстані a.
4) Усі точки, рівновіддалені від двох заданих площин, утворюють площину, яка знаходиться між ними на однаковій відстані.
5) Площина, якщо відстань між α і β — $a + b$, або порожня множина.

alldz.net

5) Площина, якщо відстань між α і β — $a + b$, або порожня множина.

6) Усі точки, рівновіддалені від точок A, B і C, знаходяться на перпендикулярі до (ABC), який проходить через центр кола, описаного навколо ΔABC, якщо A,

B і C не належать одній прямій і таких точок немає, якщо A, B і C лежать на одній прямій.

7) Центри мас утворюють площину, яка паралельна α і знаходиться від α на відстані $\frac{1}{3}\rho(M; \alpha)$.

Повторюємо курс стереометрії за 11 клас

74. *Відповідь:* Д.

75. $x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$; $y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{10-4}{2} = 3$; $z_O = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{0+12}{2} = 6$.

Відповідь: В.

76. $3x - 2y + z + 1 = 0$; $3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 0 + 1 = 0$.

Відповідь: В.

77. $x^2 + 3x + y^2 - 6y + z^2 - z = 1{,}5$;

$(x^2 + 3x + 2{,}25) - 2{,}25 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + (z^2 - z + 0{,}25) - 0{,}25 = 1{,}5$;

$(x + 1{,}5)^2 + (y - 3)^2 + (z - 0{,}5)^2 = 13$.

Відповідь: $\sqrt{13}$.

78. $x^2 - x + y^2 + 4y + z^2 + 5z = 1$;

$(x^2 - x + 0{,}25) - 0{,}25 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + (z^2 + 5z + 6{,}25) - 6{,}25 = 1$;

$(x - 0{,}5)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2{,}5)^2 = 11{,}5$.

Відповідь: $(0{,}5; -2; -2{,}5)$.

79. Вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток = 0.

$-4 \cdot 1 + 2\lambda \cdot 2 + 0 \cdot (\lambda^2 - 1) = 0$; $4\lambda = 4$; $\lambda = 1$.

Відповідь: Б.

80. Вектори колінеарні, якщо їх координати пропорційні.

$\frac{n}{n-2} = \frac{n+3}{2n-6} = \frac{n-3}{n-4}$; $n = 6$.

Відповідь: В.

81. $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; $4^2 + (n+3)^2 + 10^2 = n^2 + 4^2 + (n+9)^2$;

$n^2 + 6n + 9 + 100 = n^2 + n^2 + 18n + 81$; $n^2 + 12n - 28 = 0$; $n_1 = -14$, $n_2 = 2$.

Відповідь: Б.

82. $\cos\alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. $(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 8 + 12 \cdot (-6) = -32 - 72 = -104$;

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = 13$; $|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 8^2 + (-6)^2} = 10$; $\cos\alpha = \frac{-104}{13 \cdot 10} = -0{,}8$;

$\alpha = \pi - \arccos 0{,}8 \approx 140°$.

Відповідь: Д.

83. $\vec{a}(5 - (-3); -1 - 4; 8 - 6)$; $\vec{a}(8; -5; 2)$.

Відповідь: А.

84. $O(x; y; z)$ — центр симетрії є серединою AB.

$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$; $y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$; $z_O = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$;

$O(0; -1; 2)$.

Відповідь: В.

85. $12\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, $k = 12$.

Відповідь: Б.

aldz.net

86. $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 = 1$; $(x^2 - 2x - 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + z^2 = 1$; $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6$; $A(1; 2; 0)$ — центр сфери. $k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$. $B(-6; -12; 0)$.
Відповідь: Д.

87. А) 1; Б) 5; В) 6; Г) 6.

88. А) 3, 4, 5, 6; Б) 1, 2; В) 1, 2; Г) 3, 4, 5, 6; Д) 5.

89. А) 4; Б) 6; В) 3; Г) 10; Д) 1.

90. 1) хибне; 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, хибне; 3) правильне, але вибираємо найменший з утворених кутів; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = 0$; правильне; 5) хибне.

91. 1) хибне $\left(\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}\right)$; 2) правильне; 3) правильне; 4) правильне; 5) хибне $\left(\frac{V_1}{V_2} = k^3\right)$.

92. 1) хибне; 2) хибне; 3) якщо $|\vec{a}| = 11$, то $2^2 + (p+1)^2 + (p+5)^2 = 11^2$. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні $\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{p+1}{p-1} = \frac{p+5}{4,5}$, але ці дві умови одночасно не виконуються, тому твердження хибне.
4) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $1 \cdot 1 - 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 0$ — правильне.

93. $ax + by + cz + d = 0$ — рівняння площини.
Координати точок A, B, C повинні задовольняти це рівняння. Маємо:

$$\begin{cases} c + d = 0, \\ 2b + d = 0, \\ -a + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c = -d, \\ b = -\frac{d}{2}, \\ a = d. \end{cases}$$

Отже, $dx - \frac{d}{2}y - dz + d = 0 \Big| \cdot \frac{2}{d}$; $2x - y + 2z + 2 = 0$.
Відповідь: $2x - y + 2z + 2 = 0$.

94. Аналогічно завданню 93. $\begin{cases} 2a + b - c + d = 0, \\ a + 2b + 7c + d = 0, \\ -a + 3b + 2c + d = 0. \end{cases}$ Розв'язавши систему, маємо:
$-13x - 21y + z + 48 = 0$ — рівняння площини.
Відповідь: $13x - 21y + z + 48 = 0$.

95. *Відповідь:* $y + 5 = 0$ або $y - 5 = 0$.

96. *Відповідь:* $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$.

97. $6x - 3y + 2z - 12 = 0$ або $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} + \frac{z}{6} - 1 = 0$.
Отже, сторони ΔABC дорівнюють:
$a = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$, $c = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$.

$$S = \sqrt{\left(\sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{13} - \sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13} + \sqrt{10} - \sqrt{5}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\left(\sqrt{5} + \sqrt{13}\right)^2 - 10\right)\left(10 - \left(\sqrt{5} - \sqrt{13}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(2\sqrt{65} + 8\right)\left(2\sqrt{65} - 8\right)} = \sqrt{260 - 64} = 14.$$

Відповідь: 14 кв. од.

alldz.net

98. $\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ 5y + 3z - 15 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0, \\ \frac{y}{3} + \frac{z}{5} - 1 = 0. \end{cases}$

Отже, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} - 1 = 0$ — рівняння площини, або $15x + 10y + 6z - 30 = 0$.

Відповідь: $15x + 10y + 6z - 30 = 0$.

99. Запишемо рівняння площини у відрізках $\frac{x}{k_x} + \frac{y}{k_y} + \frac{z}{k_z} = 1$, $k_x = k_y = k_z = k$ за умовою.

1) $\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{8}{k} = 1$; $k = 11$, тому $\frac{x}{11} + \frac{y}{11} + \frac{z}{11} = 1$ або $x + y + z - 11 = 0$;

2) $\frac{1}{k} - \frac{2}{k} + \frac{8}{k} = 1$; $k = 7$ і $x - y + z - 7 = 0$;

3) $\frac{1}{k} + \frac{2}{k} - \frac{8}{k} = 1$; $k = -5$ і $x + y - z + 5 = 0$;

4) $-\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{8}{k} = 1$; $k = -9$ і $-x + y + z + 9 = 0$.

Відповідь: $x + y + z - 11 = 0$; $x - y + z - 7 = 0$; $x + y - z + 5 = 0$; $-x + y + z + 9 = 0$.

100. Площина, яка паралельна площині $3x - 2y + z + 1 = 0$, має вигляд $3x - 2y + z + d = 0$. Отже, $3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1 + d = 0$, $d = -6$. $3x - 2y + z - 6 = 0$.

Відповідь: $3x - 2y + z - 6 = 0$.

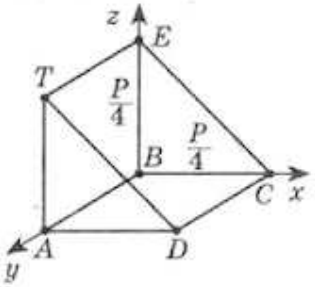
101. Площина, яка паралельна площині $x - y + z + 1 = 0$, має вигляд $x - y + z + d = 0$.

Виберемо довільну точку на даній площині, наприклад, $M(1; 1; 1)$, тоді $d(M; \beta) = \sqrt{3}$.

$\frac{|1 - 1 - 1 + d|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; $|d - 1| = 3$; $d = 4$ або $d = -2$.

Відповідь: $x - y + z + 4 = 0$ і $x - y + z - 2 = 0$.

102. $\frac{x}{\frac{P}{4}} + \frac{z}{\frac{P}{4}} = 1$ або $4x + 4z - P = 0$



Відповідь: $4x + 4z - P = 0$.

103. $\vec{a} \perp \vec{c}$, тому що $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

Відповідь: $\vec{a} \perp \vec{c}$.

104. Якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ і $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, то

$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{3}{2}$.

Відповідь: $-\frac{3}{2}$.

105. Маємо: $\frac{n}{1} = \frac{m}{n} = \frac{1}{m}$, звідси $\begin{cases} mn = 1, \\ n^2 = m, \\ m^2 = n \end{cases} \Rightarrow m = n = 1.$

Відповідь: $m = n = 1$.

aldz.net

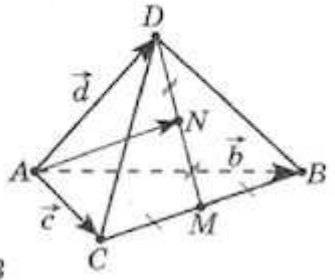
106. 1) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD_1}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{A_1B}$;

3) $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{D_1C}$;

5) $\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{B_1A}$; 6) $\overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{AD_1}$.

107. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) =$

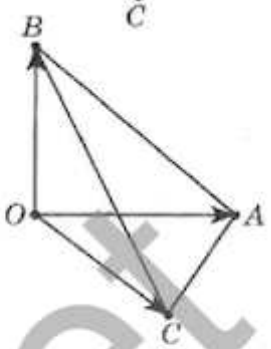
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$.



Відповідь: $\frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$.

108. Розглянемо піраміду, побудовану на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$. Оскільки $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, то

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB} \Rightarrow OB \perp (AOC)$.



$V_{\text{пір.}} = \frac{1}{3} S_{AOC} \cdot OB$; $S_{AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \sin \angle AOC$;

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sin \angle AOC = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\cos \angle AOC = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos \angle AOC = 1 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$.

Відповідь: $\sqrt{6}$.

109. 1) $ax + by + cz - d = 0$ симетрична площині $ax + by + cz + d = 0$ відносно $(0; 0; 0)$.

2) $-ax + by + cz + d = 0$ симетрична площині $ax + by + cz + d = 0$ відносно yOz.

110. Якщо площина має вигляд $x + y + z - 3 = 0$, то $(1; 1; 1)$ — вектор нормалі до неї і основа перпендикуляра, який опущено з початку координат на дану площину є т. $A(1; 1; 1)$, а вона і є серединою відрізка OO_1. Тому $O_1(2; 2; 2)$.

Відповідь: $(2; 2; 2)$.

111. $2x + y + z + 1 = 0$ симетрична площині $2x - y + z + 1 = 0$ відносно xOz.

112. Площина, яка є прообразом даної площини, має вигляд $2x - y + z + d = 0$. Паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}(-1; 0; -1)$ відобразимо центр гомотетії у початок координат. Тоді прообраз матиме вигляд $2(x + 1) - y + z + 1 + d = 0$ або $2x - y + z + d + 3 = 0$.

Тоді рівняння площини образу матиме вигляд: $2x - y + z - 2d - 6 = 0$.

Після оберненого паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(1; 0; 1)$ отримаємо $2(x - 1) - y + z - 1 - 2d - 6 = 0$ або $2x - y + z - 2d - 9 = 0$, а $-2d - 9 = -2$, $d = -3{,}5$.

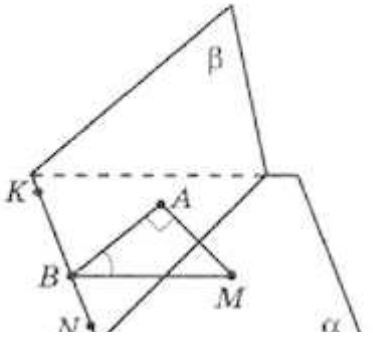
Відповідь: $2x - y + z - 3{,}5 = 0$.

113. Розглянемо двогранний кут, грані якого α і β, а ребро KN.

$M \in \alpha$, $MB \perp KN$; $MB = 40$ см.

$MA \perp \beta$, $MA = 20$ см.

$\angle ABM$ — шуканий.



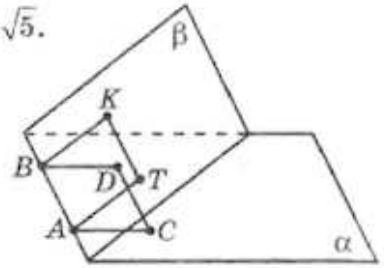
$\sin \angle ABM = \frac{AM}{BM} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$; $\angle ABM = 30°$.

Відповідь: Б.

alldz.net

114. Розглянемо двогранний кут $\alpha c \beta$.

$ABCD \in \alpha$, $ABKT \in \beta$. $TC = \sqrt{TD^2 - CD^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.



ΔTAC: $TC^2 = AT^2 + AC^2 - 2AT \cdot AC \cdot \cos\angle A$.

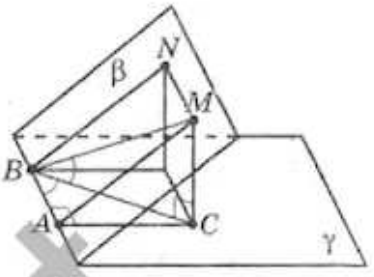
$$\cos\angle A = \frac{AT^2 + AC^2 - TC^2}{2AT \cdot AC};$$

$$\cos\angle A = \frac{2^2 + 2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{8} > 0,$$

отже, $\angle A$ — гострий.

Відповідь: А.

115. Розглянемо двогранний кут $\gamma a \beta$. $AB \in a$, $C \in \gamma$; $CA \perp BA$, $CM \perp \gamma$, $M \in \beta$; $\angle MBC = 30°$; $\angle CBA = 60°$.



Нехай $AB = a$, тоді:

ΔBAC ($\angle A = 90°$): $\cos\angle ABC = \frac{AB}{BC}$;

$$BC = \frac{AB}{\cos\angle ABC} = 2a; \quad AC = a\sqrt{3}.$$

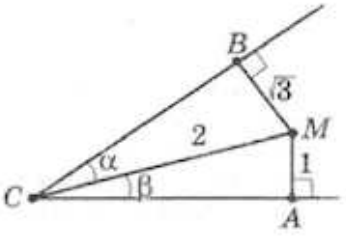
ΔMCB ($\angle C = 90°$): $\operatorname{tg}\angle MBC = \frac{MC}{BC}$; $MC = BC \operatorname{tg}\angle MBC$; $MC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

$$\Delta ACM: \operatorname{tg}\angle A = \frac{MC}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}; \quad \angle A = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

116. Розглянемо лінійний кут двогранного кута BCA.

$MA \perp CA$, $MB \perp CB$, $MA = 1$, $MB = \sqrt{3}$, $MC = 2$.



$$\sin\alpha = \sin\angle BCM = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \alpha = 60°.$$

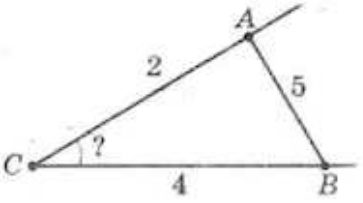
$$\sin\beta = \sin\angle ACM = \frac{1}{2}; \quad \beta = 30°.$$

Шуканий кут $\alpha + \beta = 90°$.

Відповідь: 90°.

117. Розглянемо лінійний кут двогранного кута ACB.

$AC = 2$ см, $BC = 4$ см, $AB = 5$ см.

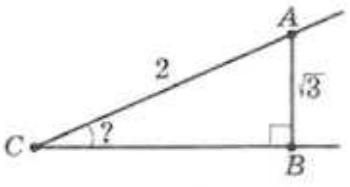


За теоремою косинусів: $\cos\angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$;

$$\cos\angle C = \frac{4 + 16 - 25}{2 \cdot 2 \cdot 4} = -\frac{5}{16}.$$

Відповідь: $-\frac{5}{16}$.

118. Розглянемо лінійний кут двогранного кута ACB.



$$\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \angle ACB = 60°.$$

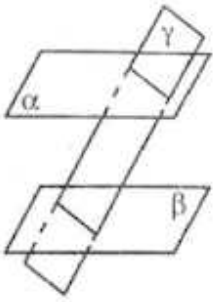
Відповідь: 60°.

aldz.net

119. Нехай $\alpha \parallel \beta$, а γ їх перетинає.

Площина γ перетинає α і β і утворює з ними двогранні кути, сума яких дорівнює 180°. Оскільки вони відносяться як 1 : 2, то вони дорівнюють 60° і 120°.

Відповідь: 60° і 120°.



120. При перетині двох паралельних площин третьою утворюються кути, сума яких дорівнює 180°. Отже, $\alpha + \beta = 180°$.

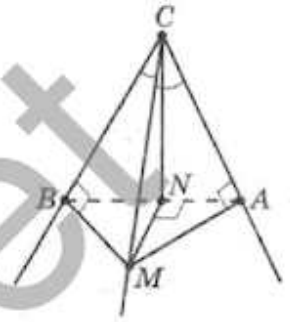
$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\alpha = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta$; $\dfrac{-\cos\beta}{\sin\beta} = -\operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\beta = 60°$.

Відповідь: 60°.

121. Розглянемо тригранний кут з ребрами CB, CA і CM.

$MA \perp CA$, $MB \perp CB$, $MA = MB = 2$, $MN \perp (ABC)$.

$MN = 1$, $\angle BCM = \angle ACM = 60°$.



ΔMAC: $\sin\angle ACM = \dfrac{MA}{CM}$, $CM = \dfrac{MA}{\sin\angle ACM} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

ΔCNM: $CN = \sqrt{CM^2 - MN^2} = \sqrt{\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{\dfrac{13}{3}}$.

ΔANM: $AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} = \sqrt{3}$.

ΔCNA: $\operatorname{tg}\angle ACN = \dfrac{AN}{CN} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. $\angle ACB = 2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

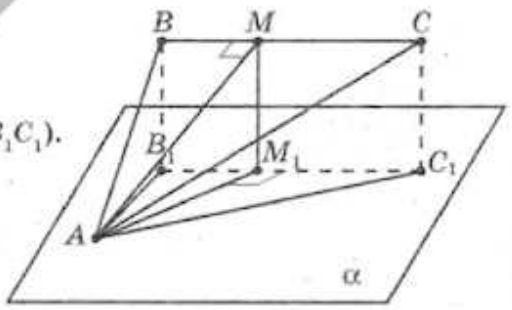
Відповідь: $2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

122. Розглянемо ΔABC. $A \in \alpha$, $BC \parallel \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$, $CC_1 = BB_1 = 5$ см.

$AB_1 = 13$ см, $AC_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 14$ см.

$S_{ABC} \cdot \cos\alpha = S_{AB_1C_1}$, α — кут між (ABC) і (AB_1C_1).

Проведемо $AM_1 \perp B_1C_1$ і $MM_1 \perp B_1C_1$, тоді за теоремою про три перпендикуляри AM — висота ΔABC і $\alpha = \angle MAM_1$.



За формулою Герона:

$S_{\Delta AB_1C_1} = \sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)} = 84$ см^2.

$AM_1 = 2S_{AB_1C_1} : B_1C_1 = 2 \cdot 84 : 14 = 12$ см; $AM = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см.

ΔAM_1M: $\cos\alpha = \dfrac{AM_1}{AM} = \dfrac{12}{13}$. $S_{ABC} = S_{AB_1C_1} : \cos\alpha$; $S_{ABC} = 84 : \dfrac{12}{13} = 91$ см^2.

Відповідь: 91 см^2.

123. $S_{\text{бічн.}} = 6aH$, a — сторона основи, H — висота.

$d^2 = H^2 + (2a)^2$; $2a = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ дм, $a = 6$ дм. $S_{\text{бічн.}} = 6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ дм^2.

Відповідь: В.

124. $\cos 60° = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{d}$; $d = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\cos 60°}$; $d = \dfrac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 2 = 10$ см.

Відповідь: А.

gdz.net

125. $l^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + H^2$, a — сторона основи, H — висота, l — бічне ребро.

$l^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 7^2 = 32 + 49 = 81$; $l = 9$.

Відповідь: Г.

126. $\cos 30^\circ = \frac{R}{l}$, R — радіус описаного кола, l — бічне ребро.

$R = 4 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$; $S_\Delta = \frac{3}{4} R^2\sqrt{3} = \frac{3}{4} \cdot 12\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

127. $R^2 = l^2 - H^2$; $R = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. $C = 2\pi R$; $C = 6\pi$.

Відповідь: Д.

128. В осьовому перерізі бачимо півколо, вписане в трикутник.

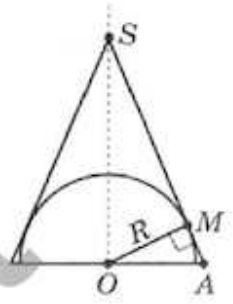
SA — твірна, SO — висота, OA — радіус конуса.

$R = OM$ — радіус півкулі. $OM \perp AS$.

$\Delta SOA \sim \Delta OMA$ (за спільним гострим кутом).

$\frac{SO}{SA} = \frac{OM}{OA}$; $OM = \frac{SO \cdot OA}{SA}$.

$OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{625 - 400} = 15$ см. $OM = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$ см.



Відповідь: В.

129. 1) Якщо паралелепіпед похилий, то не всі бічні грані прямокутники.

2) Правильна призма за основу має правильний многокутник.

3) Діагоналі прямої призми будуть однаковими, якщо діагоналі основи рівні.

4) Правильне.

5) Правильне.

Відповідь: 4, 5.

130. 1) Якщо тетраедр правильний, то всі його ребра однакові.

2) Правильне.

3) Якщо бічне ребро не дорівнює ребру основи, то піраміда не є правильним тетраедром.

4) Правильне.

5) Правильне.

Відповідь: 2, 4, 5.

131. А) — 1), 2). Б) — 1), 2), 3), 4).

132. А) — 2; Б) — 2; В) — 2; Г) — 1; Д) — 1.

133. А) — 2; Б) — 3; В) — 2, 3, 4, 5; Г) — 2, 3, 4, 5; Д) — 3.

134. $S_{\text{пер.}} = a^2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ см^2. $a = 4$ см.

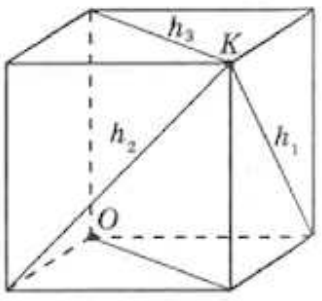
Відповідь: 4 см.

135. Нехай O — вершина куба, а K — точка, яка знаходиться в його середині. Побудуємо прямокутний паралелепіпед так, що O і K будуть кінцями його діагоналі, тоді $OK = d$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, де a, b, c — виміри п. п.

$h_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$; $h_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$; $h_3 = \sqrt{a^2 + c^2}$.

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}{2}$; $d = \sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}{2}} =$

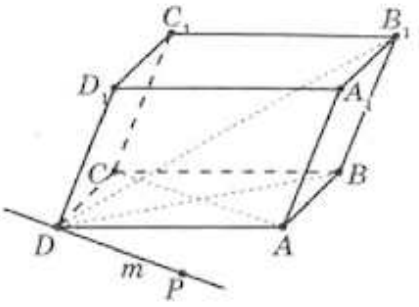
$= \sqrt{\frac{2^2 + 3^2 + 4^2}{2}} = \sqrt{14{,}5}$.



Відповідь: $\sqrt{14{,}5}$.

aldz.net

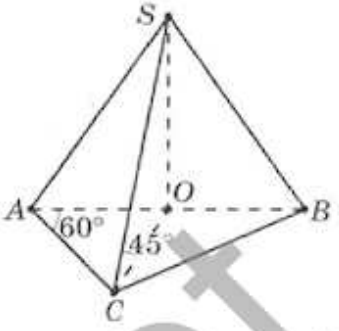
136. Розглянемо паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, усі грані якого рівні ромби. Через вершину D проведемо пряму $m \parallel AC$, отже, $\angle B_1DP$ — шуканий. $P \in m$.



$m \perp BD$ (за властивістю діагоналей ромба), тому за теоремою про три перпендикуляри $B_1D \perp m$, отже, $\angle B_1DP = 90°$.

Відповідь: 90°.

137. Розглянемо піраміду $SABC$.



$\angle ACB = 90°$, $\angle CAB = 60°$, $SO \perp (ABC)$.

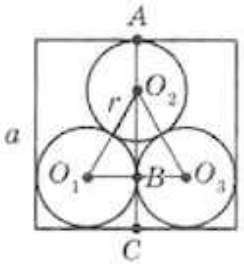
Оскільки $\angle SAO = \angle SCO = \angle SBO = 45°$, то O — центр кола, описаного навколо ΔABC. Оскільки ΔABC — прямокутний, то O — середина AB. $AO = OB = OC = OS \operatorname{ctg} 45° = 10$ дм, тому $AB = 20$ дм.

$$BC = AB \sin 60° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ дм.}$$

Відповідь: $10\sqrt{3}$ дм.

138. Якщо розглянути перпендикулярний переріз, то ми побачимо три кола однакового радіуса, що попарно дотикаються і дотикаються до сторін квадрата зі стороною a.

Позначимо радіуси циліндрів r. Тоді трикутник з вершинами в центрах цих кіл $O_1O_2O_3$ — рівносторонній зі стороною $2r$.

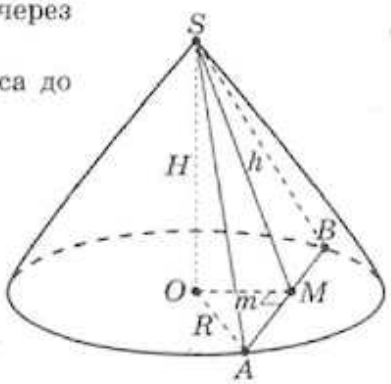


$a = AO_2 + O_2B + BC$; $AO_2 = BC = r$; $O_2B = r\sqrt{3}$,

отже, $2r + r\sqrt{3} = a$ і $r = \dfrac{a}{2+\sqrt{3}} = a\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Відповідь: $a\left(2-\sqrt{3}\right)$.

139. Розглянемо переріз ABS конуса, який проходить через його вершину S.



Нехай $m = OM$ — відстань від центра основи конуса до хорди AB, що є основою перерізу, тоді

$SM = \sqrt{H^2 + m^2} = \sqrt{49 + m^2}$;

$AM = \sqrt{R^2 - m^2} = \sqrt{81 - m^2}$.

$$S_{ABS} = \frac{1}{2} AB \cdot MS = AM \cdot MS = \sqrt{(49 + m^2)(81 - m^2)}.$$

Знайдемо найбільше значення $S(m)$.

$$S' = \frac{2m(81 - m^2) - 2m(49 + m^2)}{2\sqrt{(49 + m^2)(81 - m^2)}} = \frac{m(32 - 2m^2)}{\sqrt{(49 + m^2)(81 - m^2)}}.$$

$0 < m < R$, $0 < m < 9$.

$S'(m) = 0$, якщо $m = 0$, або $m^2 = 16$, $m = 4$.

$S(0) = 0$.

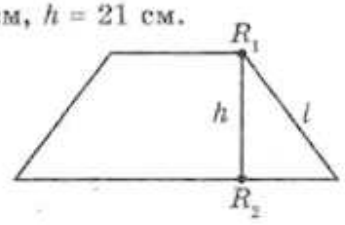
$S(9)$ — не існує.

$S(4) = \sqrt{(49 + 4^2)(81 - 16)} = 65$ — найбільша.

Відповідь: 65 см².

aldz.net

140. Розглянемо осьовий переріз зрізаного конуса, $l = 29$ см, $h = 21$ см.



$R_1 : R_2 = 5 : 9$. Нехай $R_1 = 5x$. $R_2 = 9x$,
тоді $h^2 + (R_2 - R_1)^2 = l^2$; $21^2 + (9x - 5x)^2 = 29^2$;
$16x^2 = 400$; $x^2 = 25$; $x = 5$.
Отже, $R_1 = 25$ см, $R_2 = 45$ см.
$P_{\text{ос. пер.}} = 2R_1 + 2R_2 + 2l = 2(25 + 45 + 29) = 198$ см.
Відповідь: 198 см.

141. $S_{\text{пов.}} = 6a^2$, a — ребро куба. $6a^2 = 96$; $a^2 = 16$; $a = 4$.
Відповідь: В.

142. a — сторона основи, d — діагональ бічної грані, H — висота призми.

Тоді $V = a^2H$. $\sin 30° = \dfrac{H}{d}$; $H = d \sin 30° = 4$ см.

$\cos 30° = \dfrac{a}{d}$; $a = d\cos 30° = 4\sqrt{3}$ см. $V = \left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 4 = 192$ см^3.

Відповідь: Г.

143. a — сторона основи, H — висота призми.

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H. \quad a = \sqrt{\frac{4V}{H\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 18\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}} = 3.$$

Відповідь: Б.

144. $S_{\text{бічн. пов.}} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} a \cdot h$, a — сторона основи, h — апофема.

$h = \dfrac{S_{\text{бічн. пов.}}}{2a} = \dfrac{60}{12} = 5$ м. $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$, H — висота піраміди.

$S_{\text{осн.}} = a^2 = 36$ см^2.

$H^2 = h^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$; $H = \sqrt{25 - 9} = 4$ см. $V = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$ см^3.

Відповідь: А.

145. $S_{\text{бічн.}} = 2\pi RH$, R — радіус основи, H — висота циліндра.
$V = \pi R^2 H$.

$$\begin{cases} 2\pi RH = 24\pi, \\ \pi R^2 H = 48\pi; \end{cases} \begin{cases} RH = 12, \\ R^2 H = 48; \end{cases} \begin{cases} R = 4, \\ H = 3. \end{cases}$$

Відповідь: Д.

146. $S_{\text{бічн.}} = \pi Rl$, R — радіус основи, l — твірна конуса.

$$\pi \cdot R \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 11; \quad R = \frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}; \quad S_{\text{осн.}} = \pi R^2, \quad S_{\text{осн}} = \pi\left(\frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 242.$$

Відповідь: Г.

147. Якщо діагональний переріз є квадратом із площею 25 м^2, то висота п. п. = 5 м і діагональ основи = 5 м.

Нехай $a = 2x$, $b = x$, тоді $(2x)^2 + x^2 = 5^2$; $x = \sqrt{5}$.

Маємо: $a = 2\sqrt{5}$ м; $b = \sqrt{5}$ м; $c = 5$ м.

$V = abc$; $V = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 5 = 50$ м^3.

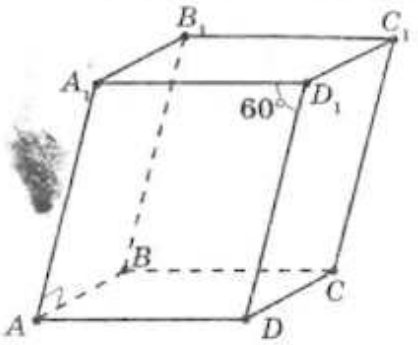
Відповідь: 50 м^3.

alldz.net

148. Розглянемо похилу призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основі якої лежить квадрат зі стороною $a = \sqrt{4-\sqrt{3}}$ см.

ABB_1A_1 і DCC_1D_1 — квадрати зі стороною a.

AA_1D_1D і BB_1C_1C — ромби зі стороною a і кутом 60°. Отже,



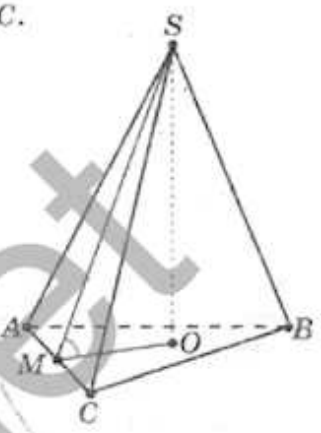
$$S_{повн} = 4S_{кв} + 2S_{ромб} = 4a^2 + 2a^2 \sin 60° =$$

$$= 2a^2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(4-\sqrt{3}\right)\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right) = 16 - 9 = 7 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 7 см².

149. Розглянемо правильну піраміду $ABCS$. O — центр ΔABC.



$H = SO = 2\sqrt{3}$ дм.

SM — апофема; $\angle SMO = 60°$.

$V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$. $\operatorname{tg} 60° = \frac{H}{R}$,

R — радіус кола, вписаного в ΔABC;

$R = H \operatorname{ctg} 60° = 2\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = 2$ дм. $S_{осн.} = 3R^2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ дм².

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24 \text{ дм}^3.$$

Відповідь: 24 дм³.

150. Розглянемо малюнок до попередньої задачі: $a = \sqrt[4]{48}$; $\angle SMO = 60°$.

$S_{повн.} = S_{осн.} + S_{бічн.}$, $S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{48}\sqrt{3}}{4} = 3$. $S_{бічн.} = 3 \cdot \frac{1}{2}ah$, h — апофема.

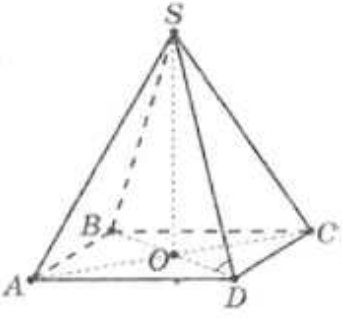
$\cos 60° = \frac{r}{h}$; $h = \frac{r}{\cos 60°}$, r — радіус вписаного кола.

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{9}}{6} = \frac{\sqrt[4]{27}}{6}, \quad h = \frac{\sqrt[4]{27}}{6} : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[4]{27}}{3};$$

$$S_{бічн.} = \frac{3}{2}\,\frac{\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{27}}{3} = \frac{2\cdot 3}{3} = 3. \quad S_{повн.} = 3 + 3 = 6.$$

Відповідь: 6.

151. Розглянемо правильну чотирикутну піраміду $ABCDS$.



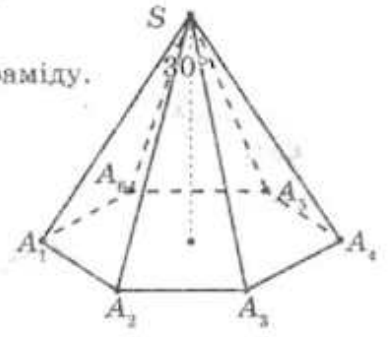
$AD = a = 3\sqrt{6}$, $V_{пір.} = 54$. Шуканий $\angle SDO = \alpha$.

$$V_{пір.} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3}a^2 \cdot H; \quad H = \frac{3V}{a^2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H\sqrt{2}}{a} = \frac{3V\sqrt{2}}{a^3}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3\cdot 54\cdot\sqrt{2}}{3^3\cdot 6\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \alpha = 30°.$$

Відповідь: 30°.

152. Розглянемо $SA_1A_2...A_6$ — правильну піраміду.



$S_{бічн.} = 6 \cdot S_{бічн.\,гр.} = 6 \cdot \frac{1}{2}l^2 \sin 30°$,

l — довжина бічного ребра.

$$S_{бічн.} = 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ дм}^2.$$

Відповідь: 6 дм².

alds.net

153. $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$; $S_{\text{осн.}} = 18 \cdot 24 = 432$ см^2.

Усі бічні ребра однакові, тому основа висоти — центр кола, описаного навколо прямокутника. $H^2 = l^2 - R^2$;

$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = 15$ см. $H = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ см.

$V = \frac{1}{3} \cdot 432 \cdot 20 = 2880$ см^3.

Відповідь: 2880 см^3.

154. Оскільки площі двох сусідніх бічних граней 20 см^2 і 30 см^2, а бічне ребро 5 см, то висоти, які проведені до їх спільної сторони, відповідно дорівнюють 20 : 5 = = 4 см і 30 : 5 = 6 см, а кут між ними 60°.

$V = S_{\perp} \cdot l$, $S_{\perp}$ — площа перпендикулярного перерізу, l — бічне ребро.

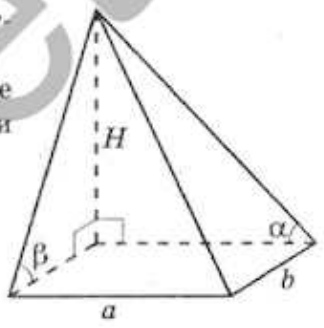
$S_{\perp} = 4 \cdot 6 \sin 60° = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ см^2; $V = 12\sqrt{3} \cdot 5 = 60\sqrt{3}$ см^3.

Відповідь: $60\sqrt{3}$ см^3.

155. Розглянемо піраміду, в основі якої лежить прямокутник.

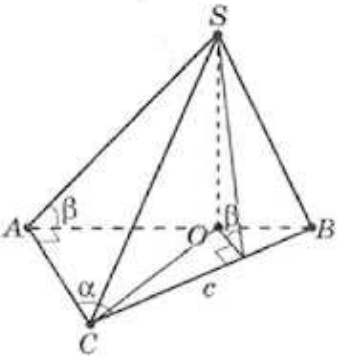
Оскільки дві бічні грані піраміди містять її висоту, то одне бічне ребро перпендикулярне основі. Позначимо сторони прямокутника a і b, тоді $a = H \operatorname{ctg} \alpha$; $b = H \operatorname{ctg} \beta$

і $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} ab \cdot H = \frac{1}{3} H^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.



Відповідь: $\frac{1}{3} H^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

156. Розглянемо піраміду $ABCS$, у якої $(SAB) \perp (ABC)$, $SO \perp AB$ $(O \in AB)$ і $SO \perp (ABC)$. $V_{\text{пір.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$.



$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$; $AB = c \sin \alpha$; $AC = c \cos \alpha$.

$S_{\text{осн.}} = \frac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{c^2}{4} \sin 2\alpha$.

CO — бісектриса $\angle ACB$.

Отже, $\angle ACO = \frac{\alpha}{2}$.

ΔOAC: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{AO}{AC}$; $AO = AC \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = c \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

ΔAOS: $\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{AO}$; $H = AO \operatorname{tg} \beta = c \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{4} \sin 2\alpha \cdot c \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta$;

$V = \frac{c^3}{12} \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \operatorname{tg} \beta$;

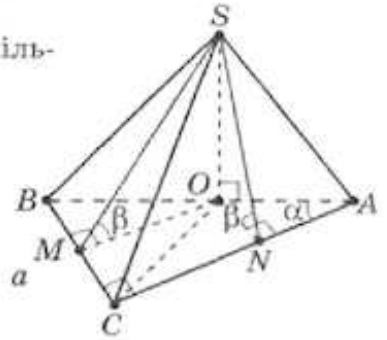
$V = \frac{c^3}{24} \sin^2 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

Відповідь: $\frac{c^3 \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \beta}{24(1 + \cos \alpha)}$.

alldz.net

157. Розглянемо піраміду, в основі якої лежить прямокутний трикутник.

$(ABS) \perp (ABC)$, $SO \perp (ABC)$ і CO — бісектриса $\angle BCA$, оскільки $\angle SMO = \angle SNO$.



$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$. $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$; $BC = a$; $AC = a \operatorname{ctg} \alpha$.

$S_{\text{осн.}} = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha$.

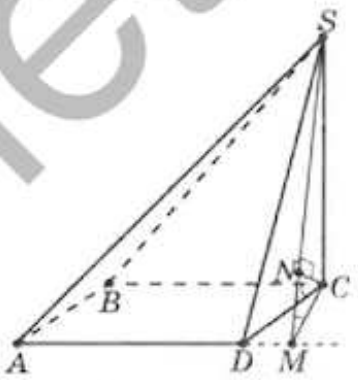
$\Delta ONA \sim \Delta BCA$, отже, $ON = \frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{a + a \operatorname{ctg} \alpha}$.

ΔSON: $\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{ON}$; $H = ON \operatorname{tg} \beta = \frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{a + a \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}$.

Відповідь: $\frac{a^3}{6} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}$.

158. Розглянемо піраміду $ABCDS$, в основі якої лежить ромб з гострим кутом α. З того, що $(BCS) \perp (ABCD)$ і $(DCS) \perp (ABCD)$ випливає, що $SC \perp (ABCD)$; SC — висота піраміди. Проведемо висоту ромба $CM \perp AD$. За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp AD$, тому $\angle SMC = \beta$. $CN \perp MS$; $CN = d$.



ΔMCN: $\sin \beta = \frac{NC}{MC}$; $MC = \frac{d}{\sin \beta}$.

ΔSNC: $\sin(90° - \beta) = \cos \beta = \frac{NC}{SC}$; $H = \frac{d}{\cos \beta}$.

ΔDMC: $\angle CDM = \Delta BCD = \alpha$; $\sin \alpha = \frac{MC}{DC}$; $DC = \frac{MC}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin \alpha \sin \beta}$.

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$. $S_{\text{осн.}} = DC^2 \cdot \sin \alpha = \frac{d^2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{d^2}{\sin \alpha \sin^2 \beta}$.

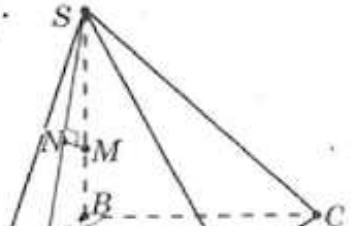
$V = \frac{d^3}{3 \sin \alpha \sin^2 \beta \cos \beta}$.

Відповідь: $\frac{d^3}{3 \sin \alpha \sin^2 \beta \cos \beta}$.

159. Розглянемо піраміду $ABCDS$, в основі якої лежить ромб з тупим кутом β. $(ABC) \perp (ABCD)$, $(BCS) \perp (ABCD) \Rightarrow BS = H$ — висота піраміди.

Проведемо $BP \perp AD$, $\angle SPB = \alpha$; M — середина BS. $MN \perp PS$, $MN = l$.

ΔSNM: $\sin \angle NSM = \sin(90° - \alpha) = \cos \alpha = \frac{2l}{H}$; $H = \frac{2l}{\cos \alpha}$.



ΔPBS: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{SB}{PB} = \frac{H}{PB}$; $PB = H \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2l}{\sin \alpha}$.

ΔAPB: $\sin \angle BAP = \sin(180° - \beta) = \sin \beta = \frac{PB}{AB}$;

alldz.net

$$AB = \frac{PB}{\sin\beta} = \frac{2l}{\sin\alpha\sin\beta}.$$



34*

$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$. $S_{осн.} = AB^2 \cdot \sin\beta = \frac{4l^2}{\sin^2\alpha \sin^2\beta} \cdot \sin\beta = \frac{4l^2}{\sin^2\alpha \sin\beta}$.

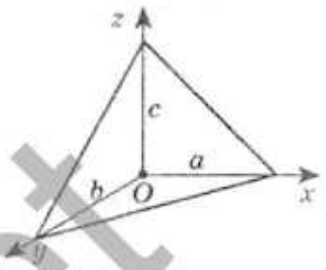
$V = \frac{8l^3}{3\sin^2\alpha \sin\beta \cos\alpha}$.

Відповідь: $\frac{8l^3}{3\sin^2\alpha \sin\beta \cos\alpha}$.

160. Якщо тетраедр розмістити так, щоб його вершина співпадала з початком координат, а його бічні грані лежали на координатних площинах, то його висота дорівнюватиме відстані від точки $O(0; 0; 0)$ до площини $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$. Отже,

$H = \frac{|bc \cdot 0 + ac \cdot 0 + ab \cdot 0 - abc|}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}} = \frac{abc}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$.

Відповідь: $\frac{abc}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$.



161. $V_{к.} = \frac{1}{3}\pi R^2 l$. За умовою $l = 2R = 2\sqrt{\frac{3}{\pi^2}}$ см.

Отже, $V = \frac{1}{3}\pi\frac{l^3}{4} = \frac{\pi l^3}{12}$; $V = \frac{\pi}{12} \cdot 2^3 \frac{\sqrt{3}}{\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ см^3.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см^3.

162. $S_{б.} = \pi Rl$. $S_1 = \pi Rl$; $S_2 = \pi \cdot 3R \cdot 2l = 6\pi Rl$. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{6\pi Rl}{\pi Rl} = 6$.

Відповідь: у 6 разів.

163. $S_{повн.} = \pi R^2 + \pi Rl$. $l = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$ см.

Якщо кут при вершині осьового перерізу 90°, то $l^2 + l^2 = (2R)^2$; $R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

$S_{повн.} = \pi\left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \pi\frac{l^2\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi l^2}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$;

$S_{повн.} = \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\pi}\left(1 + \sqrt{2}\right) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ см^2.

Відповідь: 0,5 см^2.

164. $S_{бічн.} = \pi Rl = 150\pi$; $Rl = 150$. $l = 2R$; $2R^2 = 150$; $R^2 = 75$; $l^2 = 4R^2 = 300$.
$H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{300 - 75} = 15$.

Відповідь: 15.

165. Якщо конус рівносторонній, то $l = 2r_{кон.}$, а довжина кола $2\pi r_{кон.} = \pi l$.
Оскільки круговий сектор має радіус R, то довжина дуги повинна бути πR.
Відповідь: πR.

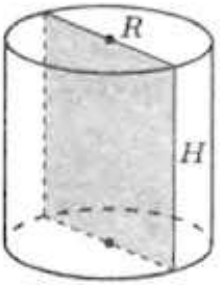
166. $S_{бічн.} = 2\pi R \cdot H$. Отже, $2\pi R = H = \sqrt{76\pi}$ (розгортка — квадрат).

$R = \frac{\sqrt{76\pi}}{2\pi}$. $S_{осн.} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{76\pi}{4\pi^2} = 19$.

Відповідь: 19.

aldz.net

167. Розглянемо циліндр. $S_{осн.} = \pi R^2$, $S_{осн.\ пер.} = 2RH$.



За умовою $S_{осн.} : S_{ос.\ пер.} = \dfrac{\pi R^2}{2RH} = \dfrac{\pi}{4}$, звідки маємо $2R = H$, отже, осьовий переріз — квадрат, тому його діагоналі перетинаються під прямим кутом.

Відповідь: 90°.

168. $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. $R_1 = 3R$, тому $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (3R)^3$. $V_1 = 27 \cdot V$;

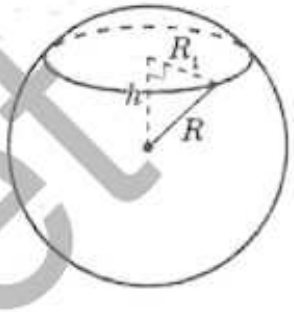
$V_1 = 135 \cdot 27 = 3645$ см³.

Відповідь: 3645 см³.

169. $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\dfrac{12}{V_2} = \dfrac{1}{9^{\frac{3}{2}}}$; $V_2 = 27 \cdot 12 = 324$ см³.

Відповідь: 324 см³.

170. Нехай R — радіус кулі, а R_1 — радіус перерізу.



$S_{пер.} = \pi R_1^2 = 16\pi$ см²; $R_1 = 4$ см.

$V_{к.} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{500\pi}{3}$ см³; $R = 5$ см.

$h = \sqrt{R^2 - R_1^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ см.

Відповідь: 3 см.

171. Див. рис. до № 170.

$S_{пер.} = \pi R_1^2$; $S_{пов.к.} = 4\pi R^2$.

За умовою $S_{пов.\ к.} = 8 \cdot S_{пер.}$, тому $4\pi R^2 = 8\pi R_1^2$; $R^2 = 2R_1^2$; $R = R_1\sqrt{2}$.

$R = \sqrt{242}$ см; $R_1 = \sqrt{121} = 11$ см. $h = \sqrt{R^2 - R_1^2} = \sqrt{242 - 121} = 11$ см.

Відповідь: 11 см.

172. При обертанні рівнобедреного трикутника з основою $2\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}$ см і висотою $\dfrac{5}{2\sqrt{\pi}}$ см навколо висоти отримаємо конус, у якого $R = \sqrt{\dfrac{5}{\pi}}$, $H = \dfrac{5}{2\sqrt{\pi}}$.

$S_{повн.} = \pi R^2 + \pi Rl$; $l = \sqrt{H^2 + R^2}$; $l = \sqrt{\dfrac{25}{4\pi} + \dfrac{25}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{125}{4\pi}}$.

$S_{повн.} = \pi\left(\dfrac{5}{\pi} + \sqrt{\dfrac{625}{4\pi^2}}\right) = \pi\left(\dfrac{5}{\pi} + \dfrac{25}{\pi}\right) = 5 + 12{,}5 = 17{,}5$ см².

Відповідь: 17,5 см².

173. При обертанні квадрата навколо його діагоналі отримаємо два однакових конуси, у яких $R = \dfrac{d}{2}$; $H = \dfrac{d}{2}$.

$V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H = \dfrac{2}{3}\pi\dfrac{d^3}{8} = \dfrac{\pi d^3}{12}$. $d = a\sqrt{2}$, a — сторона квадрата, отже,

$V = \dfrac{\pi a^3 \cdot 2\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}\sqrt{\dfrac{9}{8\pi^2}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}\cdot 3}{6\cdot 2\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{4}$ см³.

aldz.net

Відповідь: $\frac{1}{4}$ см^3.

174. При обертанні ромба навколо більшої діагоналі утворюються два однакових конуси. $R = \frac{d_1}{2}$; $H = \frac{d_2}{2}$ $(d_1 > d_2)$. $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$; $V = \frac{2\pi}{3}\frac{d_1^2}{4}\cdot\frac{d_2}{2} = \frac{\pi d_1^2 d_2}{12}$.

$d_1 = \frac{60}{\pi}$; $d_2 = \sqrt{15}$. $V = \frac{\pi}{12}\cdot\frac{3600}{\pi^2}\cdot\sqrt{15} = \frac{300\sqrt{15}}{\pi}$.

Відповідь: $\frac{300\sqrt{15}}{\pi}$.

175. Нехай R — радіус кулі, тоді $H_ц = 2R$, $R_ц = R$.
$S_к = 4\pi R^2$; $S_п = 2\pi R_ц(R_ц + H_ц)$.
$S_п = 2\pi R(R + 2R) = 6\pi R^2$, отже, $S_п = 1{,}5S_к = 1{,}5 \cdot 330$ см^2 $= 495$ см^2.
Відповідь: 495 см^2.

176. Нехай a — сторона основи правильної призми, R — радіус циліндра, а H — висота призми і циліндра, тоді $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot H = a^2 \cdot H$; $V_ц = \pi R^2 H$, де $R = \frac{a}{2}$, тому

$V_{ц.} = \frac{\pi a^2 H}{4}$; $V_{ц.} = \frac{\pi \cdot V_{пр.}}{4} = \frac{\pi \cdot 772}{\pi \cdot 4} = 193$.

Відповідь: 193.

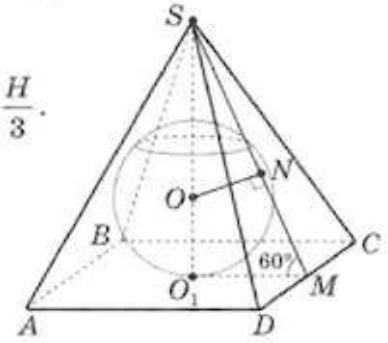
177. Нехай a — сторона основи піраміди, R — радіус конуса, H — висота конуса і піраміди, тоді $V_{пір.} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3}a^2 H$. $V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, де $R = \frac{a}{2}$.

$V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}H = \frac{\pi a^2 H}{12} = \frac{\pi V_{пір.}}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{288}{\pi} = 72$.

Відповідь: 72.

178. Розглянемо кулю $(O; R)$, вписану в правильну піраміду $SABCD$.
$l = SM$ — апофема, $ON \perp SM$.
$\angle OSN = 90° - \angle SMO_1 = 90° - 60° = 30°$.

$\sin\angle OSN = \frac{ON}{OS}$; $\sin 30° = \frac{R}{H - R}$; $\frac{R}{H - R} = \frac{1}{2}$; $R = \frac{H}{3}$.



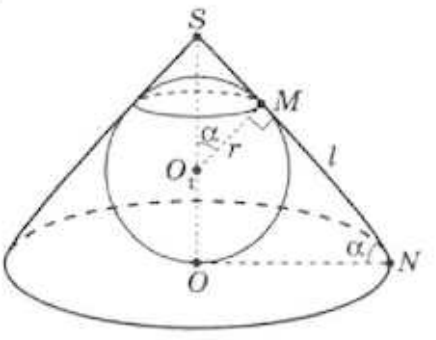
ΔSO_1M: $\sin 60° = \frac{O_1S}{SM} = \frac{H}{l}$; $H = l\sin 60° = \frac{l\sqrt{3}}{2}$,

звідки $R = \frac{l\sqrt{3}}{6}$.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{l^3\cdot 3\sqrt{3}}{6^3} = \frac{4\pi l^3\sqrt{3}}{216} = \frac{\pi l^3\sqrt{3}}{54}$. $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{54}\cdot 9^3\frac{\sqrt{3}}{\pi} = 40{,}5$.

Відповідь: 40,5.

179. Розглянемо конус, в який вписано кулю $(O; r)$.
$SN = l$ — твірна, $\angle SNO = \alpha$.
M — точка дотику, $\angle SMO_1 = 90°$. $O_1M = r$.
$\Delta SO_1M \sim \Delta SNO$ (за спільним гострим кутом).



ΔSO_1M: $\cos\alpha = \frac{O_1M}{SO_1} = \frac{r}{H - r}$; $r = \frac{H\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

ΔSON: $\sin\alpha = \frac{H}{l}$; $H = l\sin\alpha$, тому

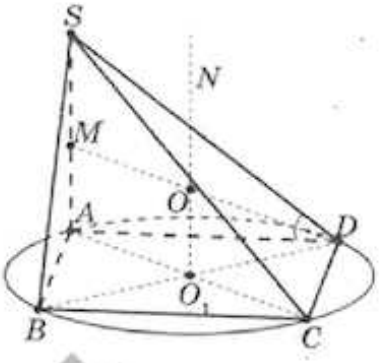
$r = \frac{l\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{l\sin 2\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}$.

alo2.net

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3;\quad V = \frac{4}{3}\pi\frac{l^3\sin^3 2\alpha}{8(1+\cos\alpha)^3} = \frac{\pi l^3}{6}\left(\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^3.$$

Відповідь: $\frac{\pi l^3}{6}\left(\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^3$.

180. Розглянемо піраміду $SABCD$, основою якої є прямокутник зі сторонами a і b.



Оскільки $(SAD) \perp (ABCD)$, а $(SAB) \perp (ABCD)$, то $AS \perp (ABCD)$, AS — висота піраміди.

$AD \perp DC$, тому за теоремою про три перпендикуляри $SD \perp CD$ і $\angle SDA = 45°$.

ΔSAD — прямокутний з кутом 45°, отже, він рівнобедрений і $SA = AD = b$.

Центром кулі, описаної навколо піраміди, є точка перетину перпендикуляра до основи, який проведено через точку перетину діагоналей прямокутника і площини, що проходить через середину AS перпендикулярно до неї.

Нехай O_1 — точка перетину діагоналей, а M — середина AS. Проведемо $O_1N \perp (ABCD)$ і площину, яка перпендикулярна AS, що проходить через т. M. Отже, O — точка їх перетину і є центром сфери, описаної навколо піраміди.

$$OO_1 = AM = \frac{b}{2};\quad AO_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2};$$

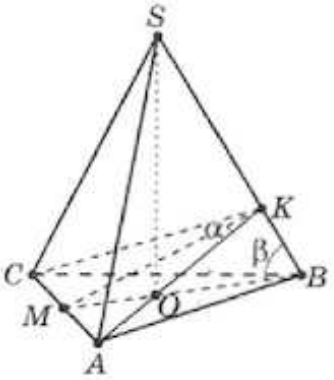
$$R = AO = \sqrt{OO_1^2 + AO_1^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{2}$.

181. Розглянемо правильну піраміду $ABCS$.

M — середина AC, $MK \perp SB$, $\angle CKA = 2\alpha$, а $\angle MKA = \alpha$, $SO = h$, $SO \perp (ABC)$.

O — центр кола, описаного навколо ΔABC, $\beta = \angle SBM$.



$V_{\text{пір.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, $R = OB$.

Нехай a — сторона основи, тоді:

ΔKMA ($\angle M = 90°$): $KM = AM \operatorname{ctg}\alpha$; $AM = \frac{a}{2}$.

ΔKMB ($\angle K = 90°$): $KM = MB\sin\beta$; $MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Отже, $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\beta$; $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}\sin\beta$. (1)

ΔSOB: $\sin\beta = \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}$. (2).

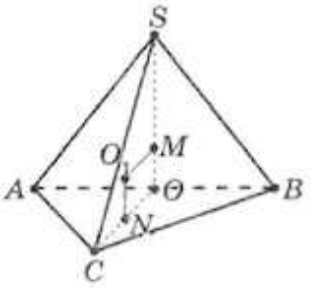
Підставимо (2) в (1), маємо:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{3h^2}{h^2+R^2};\quad R^2 = \frac{h^2(3-\operatorname{ctg}^2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\alpha};\quad V = \frac{\pi h^3(3-\operatorname{ctg}^2\alpha)}{3\operatorname{ctg}^2\alpha} = \pi h^3\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{3}\right).$$

Відповідь: $\pi h^3\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{3}\right)$.

alldz.net

182. Розглянемо піраміду $ABCS$. $AB = BC = AC = AS = BS = a$.
$(SAB) \perp (ABC)$, $SO \perp AB$ $(O \in AB)$, то $SO \perp (ABC)$.
Нехай N і M — центри кіл, описаних навколо ΔABC і ΔABS відповідно. Через N і M проведемо прямі перпендикулярні до ABC і ABS відповідно. Точка їх перетину O_1 і є центром сфери, описаної навколо $ABCS$.



$R = O_1S = \sqrt{O_1M^2 + MS^2}$.

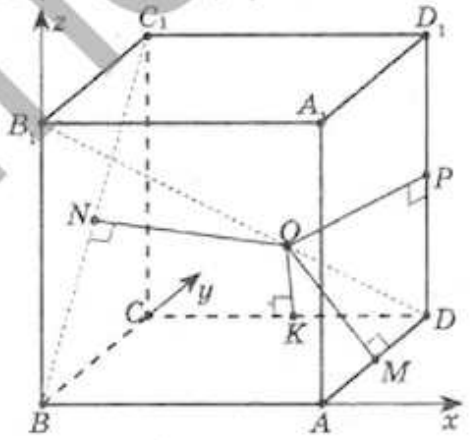
$O_1M = NO = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ (радіус кола, вписаного в ΔABC).

$MS = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (радіус кола, описаного навколо ΔABS).

Отже, $R = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{36} + \dfrac{3a^2}{9}} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{12}} = \dfrac{a}{6}\sqrt{15}$.

Відповідь: $\dfrac{a}{6}\sqrt{15}$.

183. Розглянемо куб з довжиною ребра 1. Нехай O — центр сфери, яка дотикається до AD, DD_1, CD і прямої BC_1. Тоді O лежить на діагоналі B_1D. M, P і K — точки дотику до ребер, що виходять з вершини D, а N — точка дотику до BC_1.
Введемо прямокутну систему координат з початком у т. B. Нехай a — ребро куба, побудованого на OD як на діагоналі, тоді $O(1 - a; 1 - a; a)$.



$R = OP = OM = ON = a\sqrt{2}$.

$N(0; y; y)$, $B(0; 0; 0)$, $C_1(0; 1; 1)$.

$\overrightarrow{BC_1}(0; 1; 1)$, $\overrightarrow{ON}(a - 1; y - 1 + a; y - a)$

$\overrightarrow{BC_1} \perp \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$.

$(a - 1) \cdot 0 + y - 1 + a + y - a = 0$; $y = \dfrac{1}{2}$.

$\overrightarrow{ON}\left(a - 1; a - \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2} - a\right)$.

$|\overrightarrow{ON}| = r = a\sqrt{2}$;

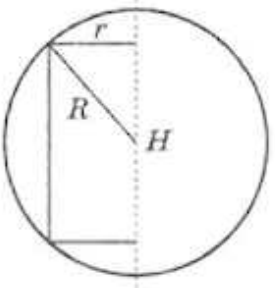
$(a - 1)^2 + \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - a\right)^2 = 2a^2$.

$a^2 - 2a + 1 + a^2 - a + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - a + a^2 = 2a^2$; $a^2 - 4a + 1{,}5 = 0$;

$a = 2 \pm \sqrt{4 - 1{,}5} = 2 \pm \sqrt{2{,}5}$. Отже, $r = \left(2 - \sqrt{2{,}5}\right)\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

Відповідь: $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

184. Розглянемо осьовий переріз. Якщо R — радіус кулі, H — висота призми, а r — радіус кола, описаного навколо основи призми, то



$R^2 = \left(\dfrac{H}{2}\right)^2 + r^2$, $r = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, маємо:

$H^2 = 4\left(R^2 - \left(\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}\right)^2\right)$.

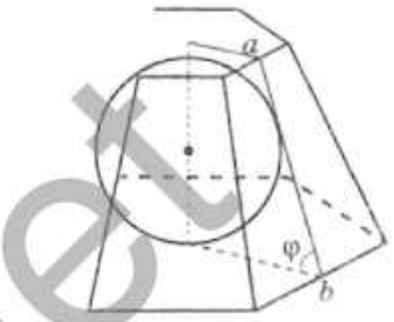
aldz.net

$$H = \frac{2}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{4R^2\sin^2\frac{180^\circ}{n} - a^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{4R^2\sin^2\frac{180^\circ}{n} - a^2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

185. Розглянемо сферу, вписану в зрізану піраміду.

Нехай a і b — сторони основи піраміди, r_1 і r_2 — радіуси кіл, вписаних в основу, тоді $r_1 = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$; $r_2 = \dfrac{b}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$. h — апофема, $h = r_1 + r_2 = \dfrac{a+b}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.



$$S_{\text{бічн.}} = \frac{a+b}{2}h \cdot n = \frac{(a+b)^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} \cdot n.$$

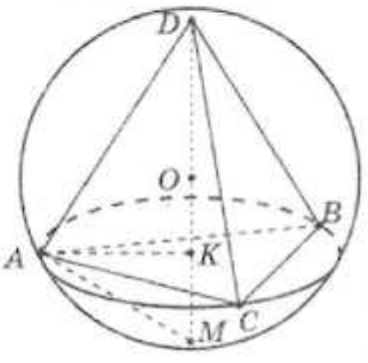
$$\sin\varphi = \frac{2R}{h};\quad R = \frac{h}{2}\sin\varphi = \frac{a+b}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}\sin\varphi.$$

$$S_{\text{сф.}} = \frac{4\pi(a+b)^2\sin^2\varphi}{16\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\pi(a+b)^2\sin^2\varphi}{4\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

За умовою $\dfrac{S_{\text{сф.}}}{S_{\text{бічн.}}} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Маємо: $\dfrac{\pi(a+b)^2\sin^2\varphi}{4\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}} \cdot \dfrac{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}{(a+b)^2 n} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$; $\dfrac{\sin^2\varphi}{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; $\sin^2\varphi = \dfrac{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}{3\sqrt{3}}$.

186. Проведемо діаметр DM. ΔMAD — прямокутний ($\angle MAD$ спирається на діаметр), $AK \perp MD$. Маємо: $AD^2 = DM \cdot DK$, $AD = a$; $DM = 2R$, R — радіус описаної кулі. $AK = R_1$, R_1 — радіус кола, описаного навколо ΔABC. За теоремою синусів:



$\dfrac{AB}{\sin\angle C} = 2R_1$; $AB = a$; $\angle C = (180^\circ - \alpha) : 2 = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

$R_1 = \dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

ΔADK: $DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - R_1^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = a\dfrac{\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Згадаємо, що $R = \dfrac{AD^2}{2DK} = \dfrac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}}$.

Відповідь: $\dfrac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}}$.

ardz.net

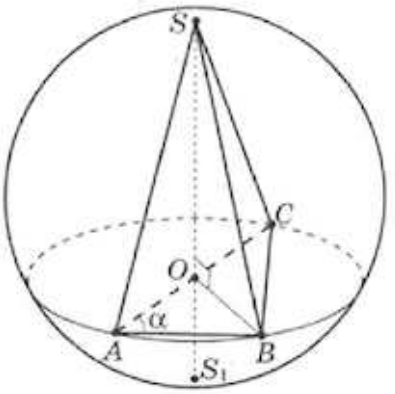
187. Розглянемо піраміду $ABCS$ $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC = \alpha$; $AS = BS = CS = a$.

Оскільки всі бічні ребра піраміди однакові, то її вершина проектується в центр кола, описаного навколо ΔABC. ΔABC за умовою прямокутний, тому центр описаного кола O є серединою гіпотенузи.

Нехай гіпотенуза $AC = c$,

тоді $AB = c\cos\alpha$, $BC = c\sin\alpha$ і

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC = \frac{c^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}.$$



Проведемо діаметр SS_1. ΔSAS_1 — прямокутний ($\angle SAS_1$ спирається на діаметр). SO — проекція катета AS на гіпотенузу SS_1, тому:

$AS^2 = OS\cdot SS_1$ або $a^2 = H\cdot 2R$; $H = \dfrac{a^2}{2R}$.

ΔSOA: $H^2 = a^2 - \dfrac{c^2}{4}$.

Порівнюючи H^2, отримаємо: $\dfrac{a^4}{4R^2} = a^2 - \dfrac{c^2}{4}$; $\dfrac{c^2}{4} = a^2 - \dfrac{a^4}{4R^2}$; $c^2 = 4a^2 - \dfrac{a^4}{R^2}$.

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H = \frac{1}{3}\left(4a^2 - \frac{a^4}{R^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{4}\cdot\frac{a^2}{2R} = \frac{a^4(4R^2 - a^2)\sin 2\alpha}{24R^3}.$$

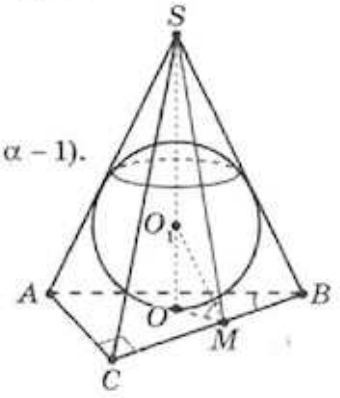
Відповідь: $\dfrac{a^4(4R^2 - a^2)\sin 2\alpha}{24R^3}$.

188. Розглянемо піраміду $ABCS$. $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = \alpha$. Оскільки всі двогранні кути при основі рівні, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в ΔABC. Нехай $AB = c$, тоді $BC = c\cdot\cos\alpha$. $AC = c\cdot\sin\alpha$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$$ (див. № 187).

OM — радіус кола, вписаного в ΔABC, тому

$$OM = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{c\sin\alpha + c\cos\alpha - c}{2} = \frac{c}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha - 1).$$



$O_1O = R$ — радіус сфери, вписаної в піраміду.

ΔO_1OM: $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{OO_1}{OM}$; $c = \dfrac{2R\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}$.

ΔSOM: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{OS}{OM} = \dfrac{H}{OM}$; $H = \dfrac{c\operatorname{tg}\beta}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$.

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{c^2\sin 2\alpha}{4}\cdot\frac{c\operatorname{tg}\beta}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) =$$

$$= \frac{c^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{24}(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = \frac{8R^3\operatorname{ctg}^3\dfrac{\beta}{2}}{(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^3}\cdot\frac{\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{24}(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) =$$

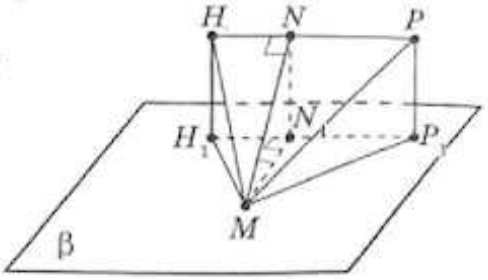
$$= \frac{R^3\operatorname{ctg}^3\dfrac{\beta}{2}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{3(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{R^3\operatorname{ctg}^3\dfrac{\beta}{2}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{3(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^2}$.

alldz.net

Задачі для повторення

1. Розглянемо ΔMHP. $M \in \beta$, $HP \parallel \beta$, $HH_1 \perp \beta$, $PP_1 \perp \beta$.
Проведемо $MN \perp HP$, $NN_1 \perp H_1P$.
$\angle NMN_1 = \alpha$ — кут між площинами β і (MHP),
тому $S_{H_1MP_1} = S_{MHP} \cdot \cos\alpha$.



$S_{MHP} = \sqrt{18(18-17)(18-10)(18-9)} = 36$ см^2.

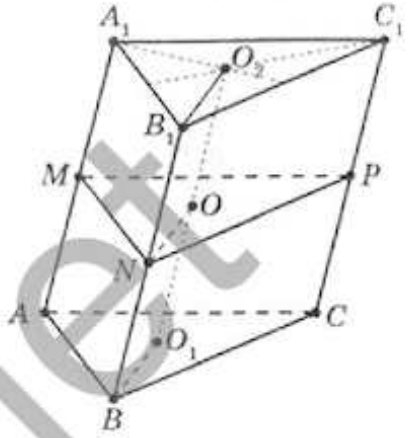
$MN = \dfrac{2S_{MHP}}{HP} = \dfrac{2 \cdot 36}{9} = 8$ см.

$MN_1 = \sqrt{MN^2 - NN_1^2} = \sqrt{8^2 - 15} = 7$ см.

$\cos\alpha = \dfrac{MN_1}{MN} = \dfrac{7}{8}$. $S_{H_1MP_1} = 36 \cdot \dfrac{7}{8} = 31{,}5$ см^2.

Відповідь: 31,5 см^2.

2. Розглянемо похилу призму $ABCA_1B_1C_1$.
MNP — її переріз; $(MNP) \parallel (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.
O_1, O, O_2 — відповідно центроїди (точки перетину медіан) ΔABC, ΔMNP, $\Delta A_1B_1C_1$.
$B_1O_2 \parallel NO \parallel BO_1$, $B_1O_2 = NO = BO_1$, тому що $\Delta ABC = \Delta MNP = \Delta A_1B_1C_1$. Отже, NB_1O_2O і $BNOO_1$ — паралелограми зі спільною стороною ON, тому $O \in O_1O_2$.



3. Усі вершини трикутників, що не належать α, розташовані на площині, що паралельна β і знаходиться по другий бік від β, ніж α на такій самій відстані, як α і β.

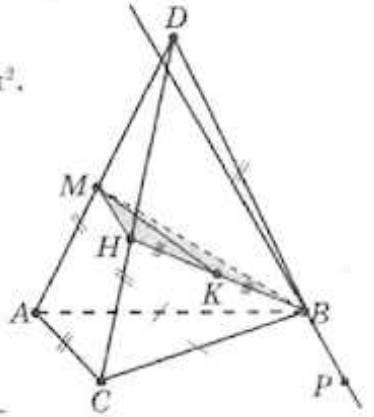
4. Центроїдом називається точка перетину медіан трикутника, яка ділить медіани у відношенні 2 : 1, починаючи з вершини, тому всі центроїди знаходитимуться на площині, яка паралельна α і β і знаходиться між ними на відстані $\dfrac{2}{3}\rho(\alpha;\beta)$ від площини β, або $\dfrac{1}{3}\rho(\alpha;\beta)$ від α.

5. Розглянемо піраміду $ABCD$, в основі якої лежить прямокутний рівнобедрений трикутник з гіпотенузою 2 см.

1) $S_{бічн.} = 2S_{BCD} + S_{ADC}$. $AB = BC = \sqrt{2}$ см.

$S_{BCD} = \sqrt{\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ см^2.

$S_{ADC} = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ см^2. $S_{бічн.} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2} + \sqrt{3} = \left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)$ см^2.



2) BH — медіана ΔDCB, тому

$BH = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(DB^2 + BC^2) - DC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2\right) - 2^2} =$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{2(4+2) - 4} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ см.

$MH = 1$ см (середня лінія ΔACD).

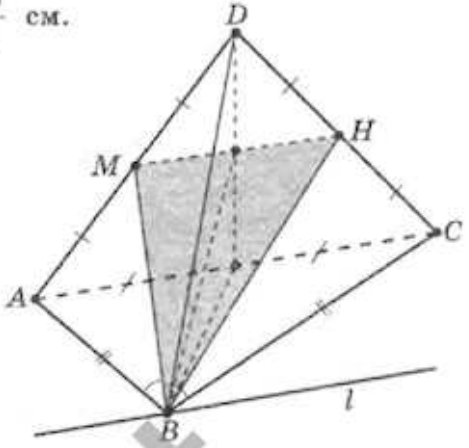
$S_{MBH} = \sqrt{\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ см^2.

alg7.net

3) $DA = DB = DC = AC = 2$ см, DO — висота, O — центр описаного кола, O — середина AC, $BO = \frac{1}{2}AC = 1$ см.

MH — середня лінія ΔADC, P — точка перетину DO і MH, P — середина DO.

У ΔADC: $AD = DC = AC$, $DO = \sqrt{3}$ см, $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ см.



$DO \perp (ABC)$, $OB \subset (ABC)$, $DO \perp BO$,
$DO \perp AC$, $BO \perp AC$.
Проведемо пряму l паралельно AC через точку B, тоді $OB \perp l$, PB — похила, OB — проекція, $PB \perp l$, $\angle PBO$ — лінійний кут двогранного кута з гранями (ABC) і (MBH) і ребром l.
У ΔPOB: $\angle O = 90°$;

$$\operatorname{tg}\angle B = \frac{PO}{BO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \angle B = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}\right) =$

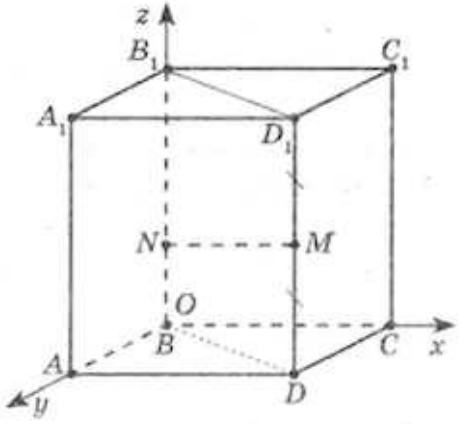
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} =$

$= \frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right)$.

5) $PB \parallel MH \parallel AC$.

6. Розглянемо правильну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Введемо систему координат таким чином, що початок координат співпадає з B, а осі Ox — з $\overrightarrow{BC}$, Oy — з $\overrightarrow{BA}$, Oz — з $\overrightarrow{BB_1}$, тоді:
$A(0; 1; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(1; 1; 0)$,
$A_1(0; 1; 4)$, $B_1(0; 0; 4)$, $C_1(1; 0; 4)$, $D_1(1; 1; 4)$,
$N(0; 0; 1)$, $M(1; 1; 2)$.



1) $MN = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3}$.

2) $\overrightarrow{MN}(-1; -1; -1)$; $\overrightarrow{AC}(1; -1; 0)$;

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-1\cdot 1 - 1\cdot(-1) - 1\cdot 0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 0;$$

$\angle\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right) = 90°$.

$\overrightarrow{BD}(1; 1; 0)$; $\cos\angle\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{-1\cdot 1 - 1\cdot -1 + 0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

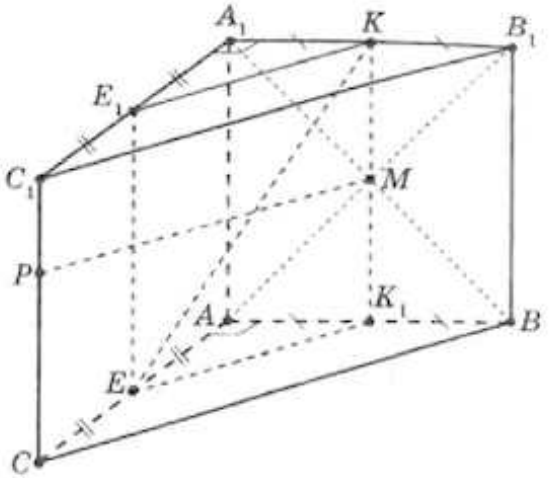
$\angle\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 180° - \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

$\overrightarrow{A_1A}(0; 0; -4)$; $\cos\angle\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A_1A}\right) = \frac{-1\cdot 0 - 1\cdot 0 + 4}{\sqrt{3}\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\angle\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A_1A}\right) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

alldz.net

7. $ABCA_1B_1C_1$ — дана пряма призма, основа якої — ΔABC, $\angle A = 90°$, кожне бічне ребро є висотою K і E — середини A_1B_1 і AC відповідно, M — точка перетину діагоналей прямокутника AA_1B_1B, $P \in C_1C$, $CP : PC_1 = 2 : 1$.



Побудуємо переріз призми площиною φ, $K \in \varphi$, $M \in \varphi$, $E \in \varphi$.

За властивістю прямокутника $KM \parallel AA_1$, $KM \perp AB$, K_1 — точка перетину KM і AB, K_1E — пряма перетину φ і (ABC). Оскільки $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, то площина φ перетинає вказані площини по паралельних прямих: $KE_1 \parallel K_1E$, K і K_1 — середини A_1B_1 і AB відповідно, E — середина AC, тоді E_1 — середина A_1C_1.

KK_1EE_1 — утворений переріз, EK_1 і E_1K — середні лінії ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, $EK_1 \parallel E_1K$, $EK_1 \parallel BC$, $E_1K \parallel B_1C_1$, отже, $(KK_1E) \parallel (BB_1C)$.

$M \in \varphi$, $M \notin EK$, $P \notin (KK_1E)$, отже, PM і EK — мимобіжні за ознакою (мимобіжність даних прямих не залежить від розміщення точки P на відрізку C_1C в заданому відношенні).

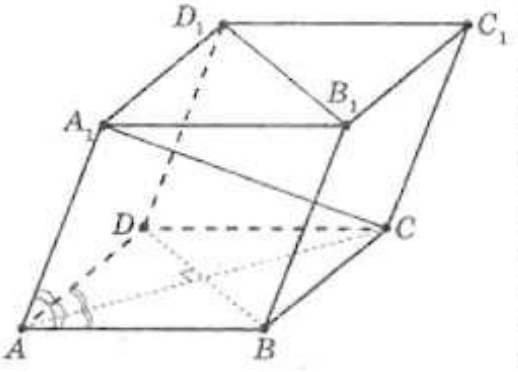
8. Нехай т. O — центр основи піраміди. Розіб'ємо піраміду на n рівних пірамід з вершиною O, в основі яких лежать бічні грані даної піраміди, позначимо h — відстань від O до бічної грані, тоді $V = \frac{n}{3} S_{\text{бічн.гр.}} \cdot h$.

З іншого боку, якщо M — будь-яка точка всередині основи і h_1, h_2, ..., h_n — відстані від неї до бічних граней, то об'єм усієї піраміди дорівнює сумі об'ємів пірамід з вершиною M, в основах яких лежать бічні грані даної піраміди.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{бічн.гр.}} \cdot h_1 + \frac{1}{3} S_{\text{бічн.гр.}} \cdot h_2 + \ldots + \frac{1}{3} S_{\text{бічн.гр.}} \cdot h_n = \frac{1}{3} S_{\text{бічн.гр.}} (h_1 + h_2 + \ldots + h_n),$$

отже, $\frac{n}{3} S_{\text{бічн.гр.}} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\text{бічн.гр.}} (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$ і $h_1 + h_2 + \ldots + h_n = nh$.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний паралелепіпед, грані — рівні ромби. $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD$ (за умовою), тоді проекцією AA_1 на (ABC) є бісектриса $\angle BAD$: AC, отже, проекцією CA_1 на площину (ABC) є пряма CA.



За властивістю паралелепіпеда $BD \parallel B_1D_1$; за властивістю ромба $AC \perp BD$, тому $CA_1 \perp BD$, $CA_1 \perp B_1D_1$.

Висновок: $CA_1 \perp B_1D_1$.

10. Нехай деяка точка A має координати $(x; y; z)$, а $B(1; 0; 0)$ і $C(0; 1; 0)$, тоді $AB = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$, $AC = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$, $BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Для точок A, B, C повинна виконуватись нерівність трикутника: $AB + AC > BC$ або $AB + AC = BC$, якщо точки належать одній прямій, а в нашому випадку $AB + AC < BC$, тому рівняння коренів не має.

Відповідь: розв'язку немає.

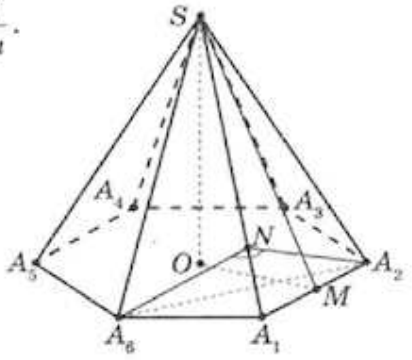
11. Аналогічно до № 10. $A(x; y; z)$, $B(0; 0; 1)$, $C(1; 0; 0)$ і $AB + AC = BC$.

Отже, координати всіх точок, що належать відрізку BC, є розв'язками цього рівняння.

gdz.net

Відповідь: безліч розв'язків.

12. Розглянемо правильну піраміду $A_1A_2...A_6S$ зі стороною a і площею бічної поверхні S. Нехай $\angle A_6NA_2 = \delta$ — кут між бічними гранями. $A_6N \perp A_1S$; $A_2N \perp A_1S$.



$h = SH$ — апофема, тоді $S = 6 \cdot \frac{1}{2} ah = 3ah$; $h = \frac{S}{3a}$.

$$\cos\frac{\sigma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\angle OMS = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{OM}{SM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2\cdot h} =$$

$$= \frac{a\sqrt{6}\cdot 3a}{4\cdot S} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{4S};$$

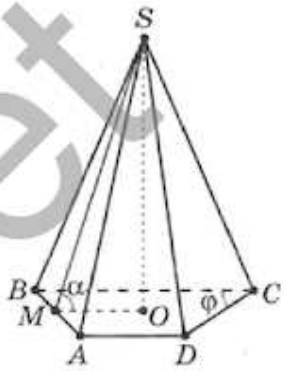
$$\sigma = 2\arccos\frac{3a^2\sqrt{6}}{4S}.$$

Відповідь: $2\arccos\frac{3a^2\sqrt{6}}{4S}$.

13. Розглянемо піраміду $ABCDS$.

$ABCD$ — трапеція, $AB = DC = a$, $\angle C = \varphi$.

Оскільки всі бічні грані утворюють з площиною основи однакові кути, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в трапецію.



Отже, $BC + AD = AB + DC = 2a$. $S_{повн.} = S_{осн.} + S_{бічн.}$.

$h_{трап.} = a\sin\varphi$.

$$S_{осн} = \frac{AD + BC}{2}\cdot h_{трап} = \frac{2a}{2}\cdot a\sin\varphi = a^2\sin\varphi.$$

$$S_{бічн} = \frac{1}{2}P_{осн}\cdot SM;\quad P_{осн.} = 4a.$$

$AD = a(1 - \cos\varphi)$; $BC = a(1 + \cos\varphi)$.

$$OM = R = \frac{a}{2}\sqrt{(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)} = \frac{a}{2}\sin\varphi.$$

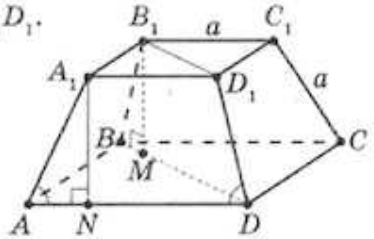
ΔMOS: $\cos\alpha = \frac{R}{MS}$; $MS = \frac{R}{\cos\alpha} = \frac{a}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha}$, $S_{бічн} = \frac{1}{2}\cdot 4a\cdot\frac{a}{2} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} = a^2\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha}$.

$$S_{повн} = a^2\sin\varphi + a^2\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} = a^2\sin\varphi\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = a^2\sin\varphi\frac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha} =$$

$$= 2a^2\sin\varphi\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Відповідь: $2a^2\sin\varphi\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

14. Розглянемо правильну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Проведемо $A_1N \perp AD$, тоді $AN = a\cos\alpha$,

$AD = a + 2a\cos\alpha = a(1 + 2\cos\alpha)$, отже,

$BD = a\sqrt{2}(1 + 2\cos\alpha)$; $B_1D_1 = a\sqrt{2}$.

$$BM = (BD - B_1D_1) : 2 = \left(a\sqrt{2} + 2a\sqrt{2}\cos\alpha - a\sqrt{2}\right) : 2 =$$

$$= a\sqrt{2}\cos\alpha.$$

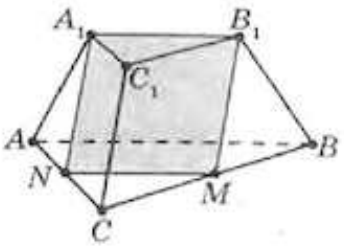
$$h = \sqrt{BB_1^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - 2a^2\cos^2\alpha} = a\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha} = a\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

$$S_{пер} = \frac{BD + B_1D_1}{2}\cdot h = \frac{a\sqrt{2}(1 + 2\cos\alpha) + a\sqrt{2}}{2}\cdot a\sqrt{-\cos 2\alpha} = a^2(1 + \cos\alpha)\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Відповідь: $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

aldz.net

15. Розглянемо зрізану піраміду $ABCA_1B_1C_1$.



Позначимо її висоту H, а площу меншої основи S, тоді площа більшої основи = $4S$

і $V_{\text{пір}} = \frac{H}{3}\left(S + \sqrt{4S \cdot S} + 4S\right) = \frac{7HS}{3}$.

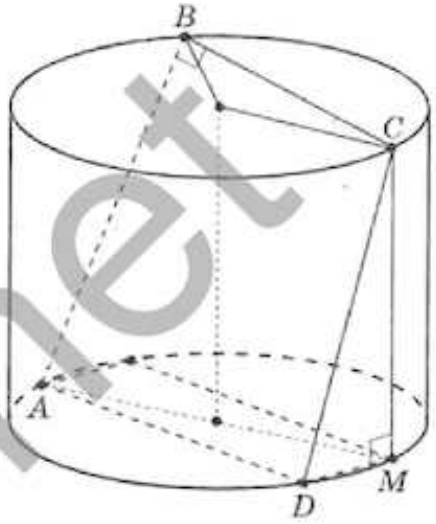
Площина, яка проходить через сторону верхньої основи паралельно протилежному ребру відтинає від піраміди похилу призму з основою S і висотою H.

Її об'єм $S_1 = SH$, а об'єм залишку $S_2 = \frac{7HS}{3} - SH = \frac{4HS}{3}$.

Отже, $\frac{S_1}{S_2} = SH : \left(\frac{4HS}{3}\right) = \frac{3}{4}$.

Відповідь: 3 : 4.

16. Якщо прямокутник паралельний до осі циліндра, то його довжина дорівнює твірній циліндра — 32 см, а ширина — в 4 рази менша, тобто 8 см.



У 4 рази більша вона бути не може (D = 26 см).

Тоді $S = 32 \cdot 8 = 256$ см^2.

Розглянемо випадок, коли прямокутник не є паралельним осі. $ABCD$ — прямокутник. Нехай $BC = x$, $CD = 4x$. З вершини прямокутника верхньої основи опустимо перпендикуляр CM до нижньої основи, тоді

$DM^2 = DC^2 - CM^2 = (4x)^2 - 32^2 = 16x^2 - 1024$.

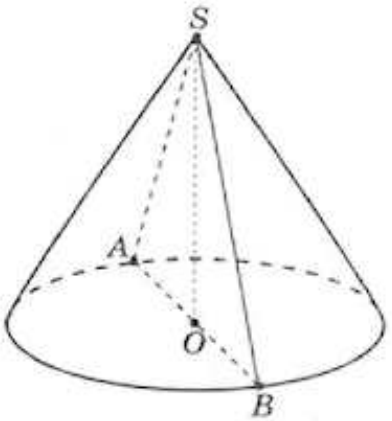
ΔADM: $DM^2 = AM^2 - AD^2 = 26^2 - x^2$.

Маємо: $16x^2 - 1024 = 676 - x^2$; $17x^2 = 1700$;

$x = 10$ см; $4x = 40$ см. $S = 10 \cdot 40 = 400$ см^2.

Відповідь: 256 см^2 або 400 см^2.

17. Розглянемо конус з осьовим перерізом ABS.



$S_{\text{ос. пер.}} = R \cdot H = R\sqrt{l^2 - R^2} = 48$ м^2.

$S_{\text{розг.}} = \frac{\pi l^2 \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi l^2 \cdot 216^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi l^2 \cdot 3}{5} = \pi Rl$, тому $R = \frac{3}{5}l$.

$S_{\text{ос. пер.}} = \frac{3}{5}l\sqrt{l^2 - \left(\frac{3l}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}l \cdot \frac{4l}{5} = \frac{12l^2}{25} = 48$; $l = 10$ м.

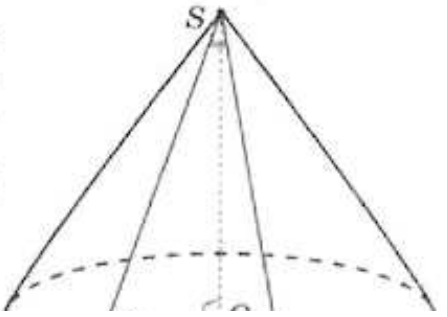
$R = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$ м.

$S_{\text{повн.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бічн.}} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(R + l)$.

$S_{\text{повн.}} = \pi \cdot 6(6 + 10) = 96\pi$ м^2.

Відповідь: 96π м^2.

18. Нехай дано конус з вершиною S, SO — відрізок осі конуса, O — центр основи, $SO = H$, $AO = R$, ΔSAB — переріз конуса (рівнобедрений), де AB — хорда основи, $SA = SB = l$ — твірні. $SO \perp (ABO)$, AO — проекція SA, $\angle SAO = \varphi$ — кут між твірною і площиною основи конуса.

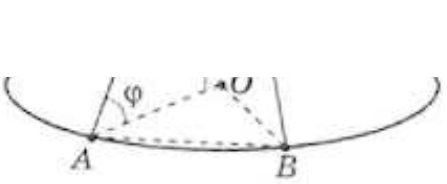


$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SA \cdot SB \cdot \sin\angle ASB = \frac{1}{2}l^2 \sin\angle ASB$.

alds.net

2 2

Оскільки $0° < \angle ASB < 180°$, $0 < \sin\angle ASB \leq 1$, то найбільшого значення площа ΔASB набуває,



якщо $\sin\angle ASB = 1$, $\angle ASB = 90°$, тоді

$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}l^2$.

1) За умовою $S_{\Delta ASB} = 2S_{осн.}$; $\frac{1}{2}l^2 = 2\pi R^2$;

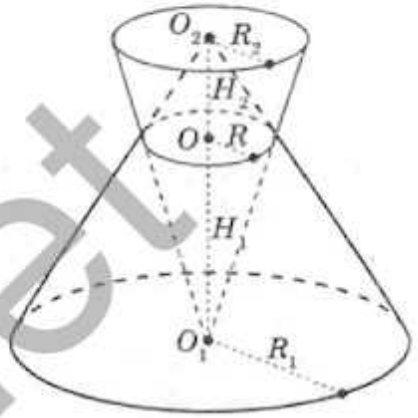
$l^2 = 4\pi R^2$; $l = 2R\sqrt{\pi}$.

З ΔASO: $\angle O = 90°$, $\angle A = \varphi$, $R = l\cos\varphi$.

Маємо: $R = 2R\sqrt{\pi}\cos\varphi$; $1 = 2\sqrt{\pi}\cos\varphi$; $\cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$; $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$.

Відповідь: 1) $\arccos\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$.

19. Розглянемо два конуси, які мають спільну висоту H. $H = O_1O_2$. Позначимо радіуси їх основ відповідно R_1 і R_2, R — радіус їх спільного кола, а $OO_2 = H_1$; $OO_1 = H_2$, тоді:



$\frac{H_1}{H} = \frac{R}{R_1}$; $H_1 = \frac{RH}{R_1} = \frac{RH}{15}$;

$\frac{H_2}{H} = \frac{R}{R_2}$; $H_2 = \frac{RH}{R_2} = \frac{RH}{10}$.

Маємо: $\frac{H_1}{H_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, отже, їх спільний переріз ділить висоту H у відношенні 2 : 3, починаючи з вершини більшого конуса, тому

$\frac{H_1}{H} = \frac{R}{R_1}$; $\frac{H_1}{H_1 + H_2} = \frac{R}{R_1}$; $R = R_1\frac{H_1}{H_1 + H_2} = 15\cdot\frac{2}{5} = 6$ см.

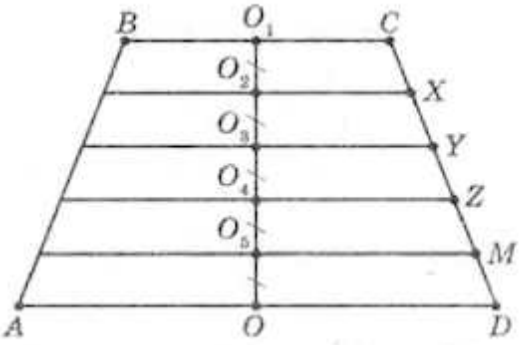
$C = 2\pi R = 2\pi\cdot 6 = 12\pi$ см.

Відповідь: 12π см.

20. Використаємо осьовий переріз зрізаного конуса — трапецію $ABCD$. O — середина AD, O_1 — середина BC, O і O_1 — центри основ зрізаного конуса, OO_1 — висота.

$S = a^2$ і $S = b^2$ — площі основ зрізаного конуса радіусів r і R відповідно,

$r = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}}$; $R = \frac{b^2}{\sqrt{\pi}}$.



За умовою точки O_2, O_3, O_4, O_5 — належать OO_1 так, що $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_5 = O_5O$.

Перерізами конуса є круги, радіуси яких: $O_2X = x$; $O_3Y = y$; $O_4Z = z$; $O_5M = m$, причому O_2X — середня лінія трапеції O_1CYO_3,

$x = \frac{r + y}{2}$ $(O_1C \parallel O_2X \parallel O_3Y \parallel O_4Z \parallel O_5M \parallel OD)$.

Аналогічно: $y = \frac{x + z}{2}$; $z = \frac{y + m}{2}$; $m = \frac{z + R}{2}$.

Маємо систему: $\begin{cases} 2x = r + y, \\ 2y = x + z, \\ 2z = y + m, \\ 2m = z + R; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y - z, \\ m = 2z - y, \\ 2(2y - z) = r + y, \\ 2(2z - y) = z + R; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y - z, \\ m = 2z - y, \\ 4y - 2z = r + y, \\ 4z - 2y = r + R; \end{cases}$ $\begin{cases} 3y - 2z = r, \\ 3z - 2y = R, \\ x = 2y - z, \\ m = 2z - y; \end{cases}$

ahdz.net

$\begin{cases} 3y - 2z = r \\ 3z - 2y = R \end{cases} \Big| \cdot 3, \quad \begin{cases} 9y - 6z = 3r, \\ 6z - 4y = 2R; \end{cases} \quad 5y = 3r + 2R; \; y = \frac{3r + 2R}{5};$

$\begin{cases} 3y - 2z = r \\ 3z - 2y = R \end{cases} \Big| \cdot 2, \quad \begin{cases} 6y - 4z = 2r, \\ 9z - 6y = 3R; \end{cases} \quad 5z = 2r + 3R; \; z = \frac{2r + 3R}{5};$

$x = 2\frac{3r + 2R}{5} - \frac{2r + 3R}{5} = \frac{6r + 4R - 2r - 3R}{5} = \frac{4r + R}{5};$

$m = 2\frac{2r + 3R}{5} - \frac{3r + 2R}{5} = \frac{4r + 6R - 3r - 2R}{5} = \frac{r + 4R}{5}.$

$S = \pi x^2 = \pi\left(\frac{4r + R}{5}\right)^2 = \frac{\pi}{25}(16r^2 + 8Rr + R^2) = \frac{16r^2\pi + 8rR\pi + \pi R^2}{25} = \frac{16a^2 + 8ab + b^2}{25};$

$S = \pi y^2 = \pi\left(\frac{3r + 2R}{5}\right)^2 = \frac{\pi}{25}(9r^2 + 12Rr + 4R^2) = \frac{9r^2\pi + 12rR\pi + 4\pi R^2}{25} =$

$= \frac{9a^2 + 12ab + 4b^2}{25};$

$S = \pi z^2 = \pi\left(\frac{2r + 3R}{5}\right)^2 = \frac{4a^2 + 12ab + 9b^2}{25}; \; S = \pi m^2 = \frac{a^2 + 8ab + 16b^2}{25}.$

Відповідь: $\frac{16a^2 + 8ab + b^2}{25}; \; \frac{9a^2 + 12ab + 4b^2}{25}; \; \frac{4a^2 + 12ab + 9b^2}{25}; \; \frac{a^2 + 8ab + 16b^2}{25}.$

21. Розглянемо конус, у який вписано циліндр.

$OS = 10\sqrt{3}$ см, $OO_1 = 4\sqrt{3}$ см, $\angle SMO = 60°$.

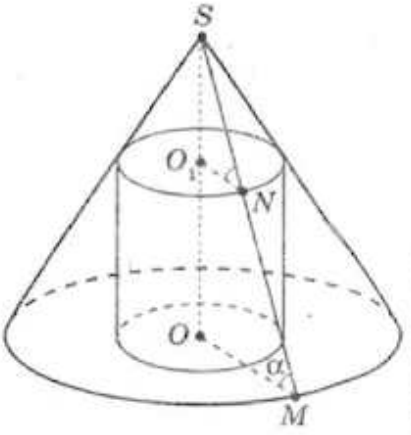
ΔSO_1N: $\angle SO_1N = 90°$, $\angle SNO_1 = 60°$,

$SO_1 = SO - OO_1 = 6\sqrt{3}$ см.

$O_1N = r_ц$, тоді $\operatorname{ctg} 60° = \frac{r}{6\sqrt{3}}$; $r = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$ см.

$S_{б.ц.} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}\pi$ см^2.

Відповідь: $48\sqrt{3}\pi$ см.



22. Розглянемо правильну піраміду $ABCDS$ зі стороною основи 10 м, в яку вписано циліндр.

$OS = H_{пір.}$; SM — апофема, $\angle OMS = 60°$, $OM = \frac{AD}{2} = 5$ м.

ΔMOS: $\operatorname{tg} 60° = \frac{OS}{OM} = \frac{H_{пір.}}{5}$; $H_{пір.} = 5\operatorname{tg} 60° = 5\sqrt{3}$ м.

$\Delta SO_1N \sim \Delta SOM$ (спільний гострий кут).

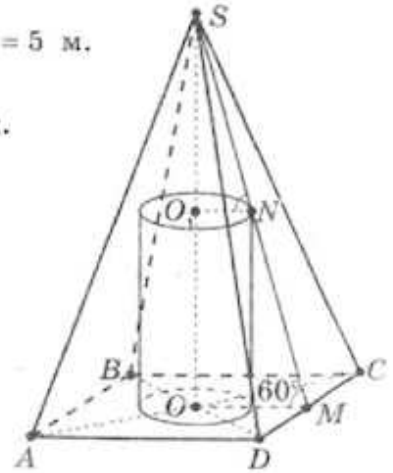
ΔSO_1N: $SO_1 = H_{пір.} - H_ц = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$ м,

$\angle SNO_1 = 60°$.

$O_1N = r_ц$. $\operatorname{tg} 60° = \frac{O_1S}{O_1N} = \frac{\sqrt{3}}{r_ц}$; $r_ц = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} 60°} = 1$ м.

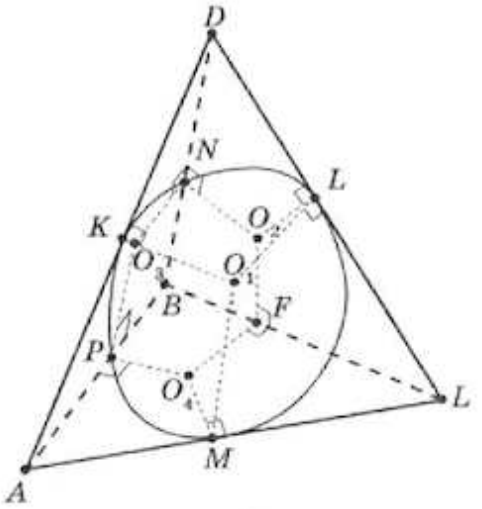
$S_{б.ц.} = 2\pi r_ц H_ц = 2\pi \cdot 1 \cdot 4\sqrt{3} = 8\pi\sqrt{3}$ м^2.

Відповідь: $8\pi\sqrt{3}$ м^2.



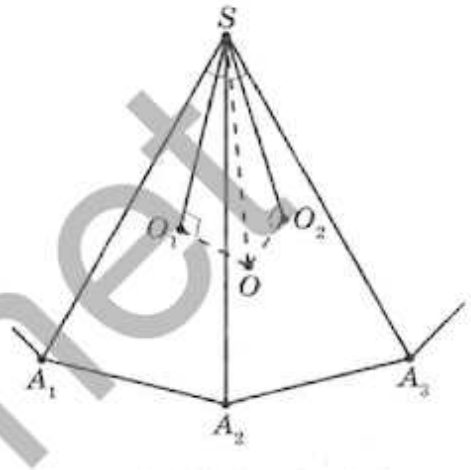
alldz.net

23. Нехай $DABC$ — дана піраміда, а дана сфера дотикається до всіх ребер: K, L, M, F, P, N — точки дотику, $K \in AD$, $L \in DC$, $M \in AC$, $F \in BC$, $P \in AB$, $N \in BD$. Перерізами сфери з гранями піраміди є коло з центрами O_1, O_2, O_3, O_4, вписані у відповідні грані піраміди ΔADC, ΔBDC, ΔADB і ΔABC — точки перетину бісектрис відповідних трикутників. Тоді за властивостями точок дотику: $AK = AM = AP = a$, $PB = NB = FB = b$, $LC = MC = FC = c$, $KD = ND = LD = d$.



$AD + BC = a + d + b + c$;
$DC + AB = d + c + a + b$;
$AC + BD = a + c + b + d$.
Висновок: $AD + BC = AB + DC = AC + BD$.

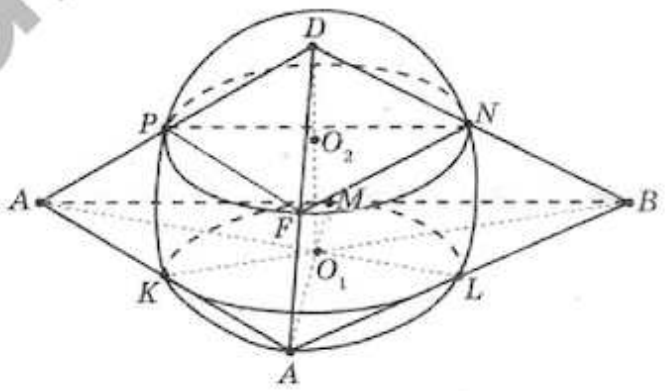
24. Нехай $SA_1A_2A_3...A_n$ — дана піраміда, а дана сфера з центром O дотикається до бічних граней у точках O_1, O_2, O_3, ..., O_n — центрах кіл, описаних навколо ΔSA_1A_2, ΔSA_2A_3, ..., ΔSA_nA_1, тоді $OO_1 \perp (SA_1A_2)$, $OO_2 \perp (SA_2A_3)$, ..., $OO_1 = OO_2 = OO_3 = ...$ $\Delta SOO_1 = \Delta SOO_2 = ...$ (як прямокутні за гіпотенузою і катетом), звідси $SO_1 = SO_2 = ... = R$.



У ΔSA_1A_2 за теоремою синусів: $\dfrac{A_1A_2}{\sin \angle S} = 2R$;

$A_1A_2 = 2R \sin \angle S$.
Оскільки всі плоскі кути рівні за умовою, що $A_1A_2 = A_2A_3 = ... A_nA_1$, тобто $A_1A_2...A_n$ — правильний n-кутник ($\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = ...$, бо всі двогранні кути при ребрах піраміди рівні).
SO належить висоті піраміди, SO рівновіддалена від граней, отже, піраміда є правильною.

25. Нехай $DABC$ — дана піраміда, а дана сфера з центром O дотикається до ребер основи в точках K, L, M — серединах AC, BC, AB відповідно.



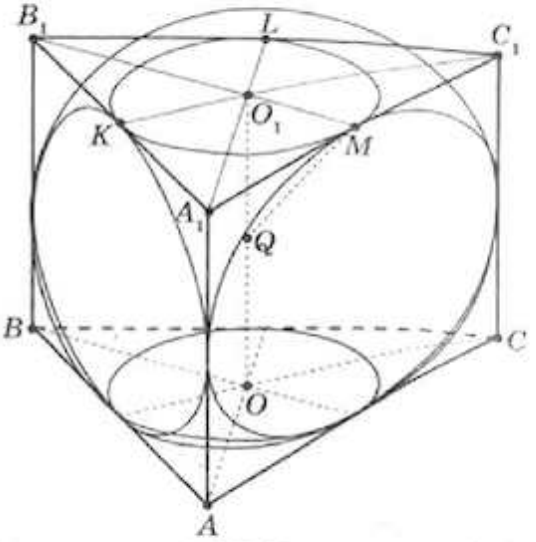
Тоді перерізом є коло з центром O_1, вписане в ΔABC, O_1 — точка перетину бісектрис. $O_1K \perp AC$, $O_1L \perp BC$, $O_1M \perp AB$ як радіуси вписаних кіл. Оскільки бісектриси є серединними перпендикулярами, то ΔABC — правильний.
Дана сфера перетинає бічні ребра в точках P, N, F — серединах AD, BD, CD відповідно, тоді перерізом є коло з центром O_2 — описане навколо ΔPNF.

PF, PN, FN — середні лінії ΔADC, ΔADB, ΔBDC, тому $PF \parallel AC$, $PF = \dfrac{1}{2} AC$;

$PN \parallel AB$, $PN = \dfrac{1}{2} AB$; $FN \parallel BC$, $FN = \dfrac{1}{2} BC$, тобто ΔPNF — правильний, $(PNF) \parallel (KLM)$. За властивістю сфери $OO_1 \perp (KML)$, $OO_2 \perp (PNF)$, $(KML) \parallel (PNF)$, отже, $O_2 \in OO_1$, тоді бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковими кутами, значить, $D \in OO_1$.
Висновок: $DABC$ — правильна піраміда.

alldz.net

26. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана правильна призма, основа — ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні, бічні грані — прямокутники. Дана куля з центром Q і радіусом R дотикається до всіх ребер, тоді перерізи кулі з основами — круги, вписані в трикутники, O і O_1 — центри ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ відповідно, а перерізи з бічними гранями — круги, вписані в прямокутники. Звідси бічні грані призми — квадрати, отже, всі ребра рівні.



Позначимо ребро призми a,

$OO_1 \parallel AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $OO_1 = AA_1 = a$,

Q — середина OO_1, $O_1Q = OQ = \dfrac{a}{2}$.

K, M, L — точки дотику круга перерізу зі сторонами $\Delta A_1B_1C_1$: середини A_1B_1, C_1A_1 і B_1C_1 відповідно, O_1M — радіус круга, $O_1M = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

У ΔQO_1M: $\angle O_1 = 90°$ ($OQ \perp (A_1B_1C_1)$), $QO_1 = \dfrac{a}{2}$; $QM = R$, $QM^2 = QO_1^2 + O_1M^2$;

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2;\quad R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12};\quad R^2 = \frac{a^2}{3};\quad a^2 = 3R^2.$$

$S_{б.} = P_{\Delta ABC} \cdot H = 3a \cdot a = 3a^2$; $S_{б.} = 3 \cdot 3R^2 = 9R^2$.

Відповідь: $9R^2$.

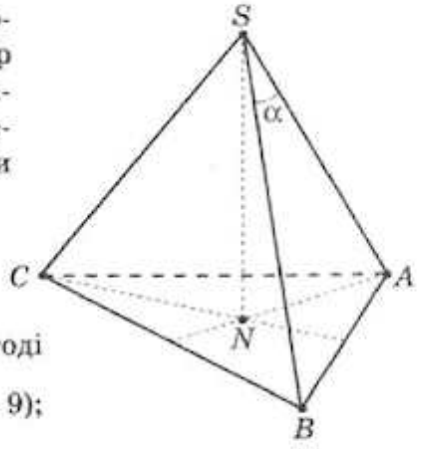
27. Міркуючи аналогічно до розв'язання № 26, для правильної шестикутної призми маємо O_1M — радіус круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною a, $O_1M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. У ΔQO_1M: $\angle O_1 = 90°$; $QO_1 = \dfrac{a}{2}$, $QM = R$.

$$QM^2 = QO_1^2 + O_1M^2;\quad R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;\quad R^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4};\quad R^2 = a^2.$$

$S_{б.} = P_{осн} \cdot H = 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$; $S_{б.} = 6R^2$.

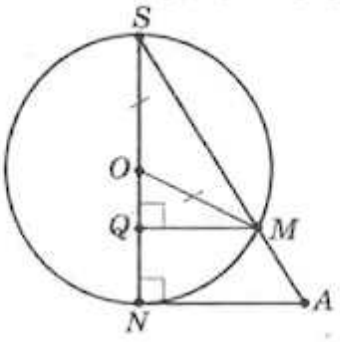
Відповідь: $6R^2$.

28. Нехай $SABC$ — правильна трикутна піраміда, основа — ΔABC — правильний, SN — висота, N — центр ΔABC, $SN = H$, $\angle ASB = \alpha$. Висота піраміди є діаметром сфери радіуса R, $H = 2R$, O — центр сфери, $OS = ON = R$. Лінією перетину піраміди і сфери є коло перерізу з центром Q, $Q \in SN$.



Розглянемо ΔSNA: $\angle N = 90°$; M — точка перетину сфери і бічного ребра SA; $MQ \perp SN$.

$MQ = r$ — радіус перерізу; $l = 2\pi r$.



Позначимо $\angle SAN = \beta$, тоді

$$3\cos\beta = 2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}(OK - 9);$$

$$\beta < 90°.\ \cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

У ΔSNA: $\angle N = 90°$; $\angle A = \beta$; $\angle S = 90° - \beta$.

У ΔSOM: $SO = OM = R$; $\angle M = \angle S = 90° - \beta$.

$MQ \parallel AN$, $\angle NAS = \angle QMS = \beta$, тоді

$\angle QMO = \beta - (90° - \beta) = 2\beta - 90°$.

alnz.net

У ΔQMO: $\angle Q = 90°$; $QM = r = OM \cdot \cos(2\beta - 90°) = OM \cdot \sin 2\beta = 2R \cdot \sin\beta\cos\beta$.

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}};$$

$$QM = H\cdot\sin\beta\cos\beta = H\cdot\sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}H\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} = r;$$

$$l = 2\pi\cdot\frac{2}{3}H\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4\pi H}{3}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь: $\frac{4\pi H}{3}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

29. Див. рис. 2 і позначення до № 28.

Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, основа — квадрат $ABCD$, SN — висота. Маємо: $\cos\beta = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}(OK - 10)$.

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

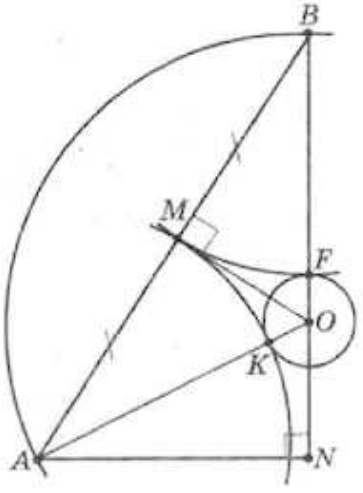
$$QM = H\sin\beta\cos\beta = H\cdot\sqrt{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = H\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot H\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = H\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos\alpha} = r.$$

$$l = 2\pi\cdot H\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos\alpha}.$$

Відповідь: $l = 2\pi H\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

30. Нехай точки A, B, C, D — центри даних чотирьох куль. Оскільки кожна з куль дотикається до трьох інших, то $ABCD$ — правильний тетраедр з ребром $2R$. Сфер, що дотикаються до чотирьох даних, існує дві — внутрішня і зовнішня, їхні центри співпадають і ця точка є ортоцентром даного тетраедра (§ 17).



Розглянемо ΔABN:

$AB = 2R$ — ребро тетраедра, M — середина AB — точка дотику куль, $AM = MB = R$; BN — висота і медіана тетраедра, $BN = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$ (§ 17), точка O — ортоцентр, $O \in BN$, $AO = BO = R + x$, де $R = AK = BF$; $x = KO = FO$, $AO = BO$; x — радіус внутрішньої сфери; $x + 2R$ — радіус зовнішньої сфери.

ΔAOB — рівнобедрений, OM — медіана і висота.

$\Delta OMB \sim \Delta ANB$ ($\angle O = \angle N = 90°$, $\angle B$ — спільний), звідси

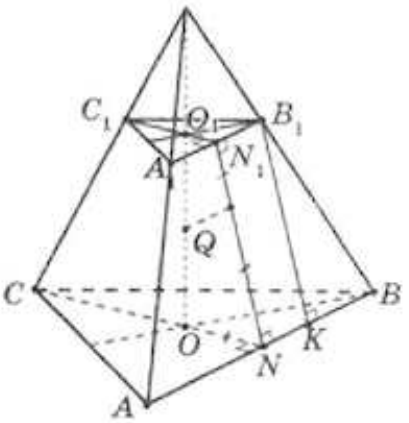
$$\frac{MB}{NB} = \frac{OB}{AB};\quad \frac{R}{2R\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{x+R}{2R};\quad \frac{R}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = x+R;\quad x+R = \frac{3R}{\sqrt{6}} = \frac{R\sqrt{6}}{2};$$

alqz.net

$$x = \frac{R\sqrt{6}}{2} - R = R\left(\sqrt{1,5} - 1\right);\quad x + 2R = \frac{R\sqrt{6}}{2} - R + 2R = \frac{R\sqrt{6}}{2} + R = R\left(\sqrt{1,5} + 1\right).$$

Відповідь: $R\left(\sqrt{1,5} \pm 1\right)$.

31. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана правильна зрізана піраміда, основи — ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні, бічні грані — рівнобічні трапеції, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = a$. У дану піраміду вписана куля, вона дотикається до всіх граней, Q — центр, $Q \in OO_1$, де O і O_1 — центри ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, $OO_1 \perp (ABC)$, $OO_1 \perp (A_1B_1C_1)$. Позначимо N і N_1 — середини AB і A_1B_1 відповідно, тоді $ON \perp AB$, $O_1N_1 \perp A_1B_1$, $NN_1 \perp AB$, $NN_1 \perp A_1B_1$ (теорема про три перпендикуляри). Позначимо сторони основ $AB = y$, $A_1B_1 = x$,



$ON = \frac{y\sqrt{3}}{6}$; $O_1N_1 = \frac{x\sqrt{3}}{6}$ як радіуси вписаних кіл у ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ відповідно.

За властивістю вписаної кулі: $ON + O_1N_1 = NN_1 = \frac{(x+y)\sqrt{3}}{6}$.

Оскільки існує куля, що дотикається до всіх ребер піраміди, то переріз кулі і бічних граней — вписані круги, тоді в трапеції AA_1B_1B: $AB + A_1B_1 = AA_1 + BB_1$:

$x + y = 2a$; $NN_1 = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Проведемо в трапеції AA_1B_1B висоту B_1K; $B_1K = N_1N = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

У ΔB_1KB: $\angle K = 90°$; $BB_1^2 = B_1K^2 + BK^2$;

$$BK^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3};\quad BK = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$AB = x + \frac{2a\sqrt{6}}{3};\quad AB + A_1B_1 = 2a;\quad 2x + \frac{2a\sqrt{6}}{3} = 2a;$$

$$x = a - \frac{a\sqrt{6}}{3} = a\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) = A_1B_1;\quad AB = a - \frac{a\sqrt{6}}{3} + 2a\,\frac{\sqrt{6}}{3} = a\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right).$$

Відповідь: $a\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$ і $a\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$.

32. Розглянемо прямий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основі якого лежить ромб. M і N — середини BB_1 і CC_1 відповідно, і $AMND$ — переріз паралелепіпеда, який утворює кут 45° з площиною основи. Отже,

$S_{AMND} \cdot \cos 45° = S_{осн.}$; $S_{осн.} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{3}$ см²,

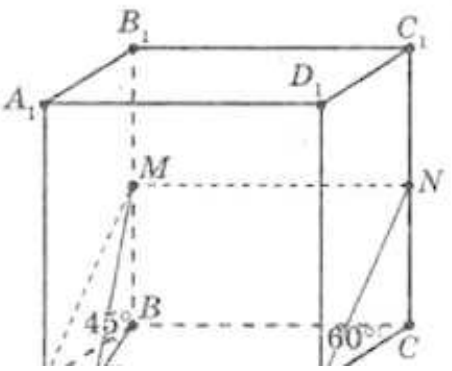
тому сторона ромба $a = 6$ см ($S_p = a^2 \sin 60°$).

BP — висота ромба і дорівнює

$S_p : a = 18\sqrt{3} : 6 = 3\sqrt{3}$ см.

ΔPBM: $\operatorname{tg} 45° = \frac{MB}{PB}$; $MB = 3\sqrt{3}$,

а $H_п = 2MB = 6\sqrt{3}$ см.



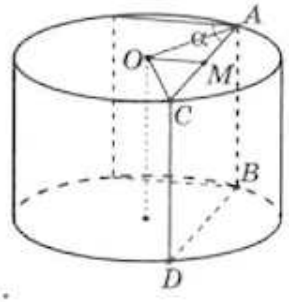
ald.net

$V_{п.} = S_{осн.} \cdot H = 18\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 324$ см³.

Відповідь: 324 см³.



33. Розглянемо циліндр, який перетнуто двома площинами зі спільною твірною AB. Площі перерізів однакові і дорівнюють Q, а кут між ними α. $AB = H$, тому $AC = \dfrac{Q}{H}$.



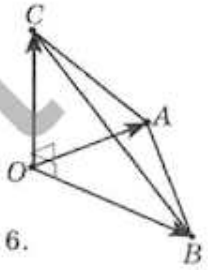
ΔCOA — рівнобедрений ($OC = OA = R$). Проведемо $OM \perp AC$. ΔOMA: $OA = R$; $\angle OAM = \dfrac{\alpha}{2}$; $AM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{Q}{2H}$;

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AM}{OA} = \dfrac{Q}{2HR}$; $R = \dfrac{Q}{2H\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. $V = \pi R^2 H = \dfrac{\pi Q^2}{4H\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi Q^2}{4H\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

34. Розглянемо піраміду, побудовану на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$, тому $\angle COA = 90°$; $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$, тому $\angle COB = 90° \Rightarrow CO \perp (AOB)$. Отже, маємо піраміду з основою AOB і висотою OC.



$V = \dfrac{1}{3}S_{AOB}\cdot OC$; $OC = \dfrac{3V}{S_{AOB}}$; $\cos\angle AOB = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|} = \dfrac{1}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{4}$.

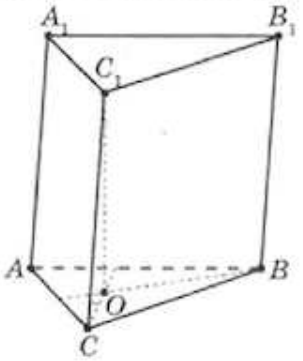
$\sin\angle AOB = \sqrt{1-\cos^2\angle AOB} = \sqrt{1-\dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

$S_{AOB} = \dfrac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle AOB = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. $OC = \dfrac{3\sqrt{15}\cdot 2}{\sqrt{15}} = 6$.

Відповідь: 6.

35. Розглянемо похилу призму $ABCA_1B_1C_1$, в основі якої лежить правильний трикутник.

Нехай O — центр ΔABC, тоді $C_1O \perp (ABC)$.



$\angle C_1CO = 45°$; ΔC_1OC: $\operatorname{tg}45° = \dfrac{OC_1}{OC} = \dfrac{H}{R}$,

де H — висота призми, R — радіус кола, описаного навколо основи. $R = H\operatorname{ctg}45° = 4$.

$S_{осн.} = \dfrac{3}{4}R^2\sqrt{3} = \dfrac{3}{4}\cdot 4^2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

$V = S_{осн.}\cdot H = 12\sqrt{3}\cdot 4 = 48\sqrt{3}$.

Відповідь: $48\sqrt{3}$.

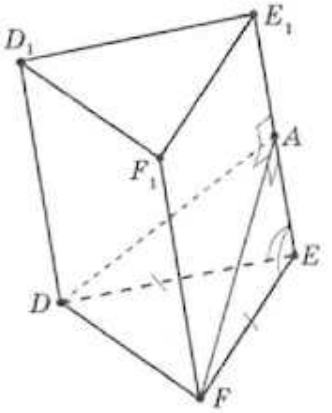
36. $DEFD_1E_1F_1$ — дана похила призма, $\angle E_1ED = \angle E_1EF < 90°$. $EF = ED$, $DF = m$, $EE_1 = l$. Двогранний кут при ребрі EE_1 — 90° (грані FF_1E_1E і DD_1E_1E рівні).

Проведемо $FA \perp EE_1$, $A \in EE_1$, $\angle FAE = 90°$.

$\Delta FAE = \Delta DAE$ ($FE = ED$, AE — спільна, $\angle E_1EF = \angle E_1ED$), $\angle FAE = \angle DAE = 90°$, отже, $DA \perp EE_1$.

Звідси: $\angle DAF = 90°$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі EE_1, $EE_1 \perp (DAF)$.

Прямокутний рівнобедрений ΔDAF ($DA = FA$) є перерізом, перпендикулярним до бічного ребра, тоді $V = S_{DAF}\cdot EE_1$.

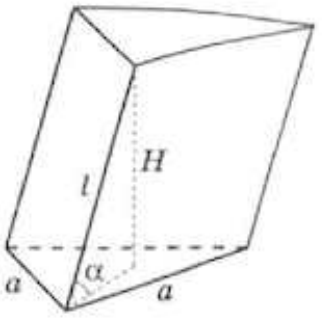


$S_{DAF} = \dfrac{1}{4}m^2$; $V = \dfrac{1}{4}m^2 l$.

Відповідь: $V = \dfrac{m^2 l}{4}$.

alex.net

37. Розглянемо правильну трикутну похилу призму. Позначимо сторону основи a, бічне ребро — l, висоту призми — H, а кут нахилу бічного ребра до основи — α, тоді



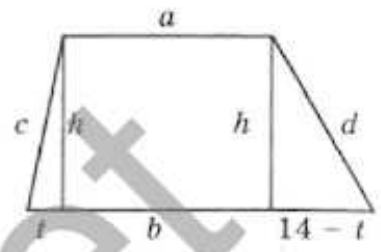
$$a^2 l = \frac{8}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot H;\quad a^2 l = \frac{8}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H;\quad l = \frac{2\sqrt{3}}{3} H.$$

$$\sin\alpha = \frac{H}{l} = \frac{H \cdot 3}{2\sqrt{3}H} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \alpha = 60°.$$

Відповідь: 60°.

38. Оскільки призма пряма, то її бічні грані — прямокутники з однаковою висотою, тому сторони трапеції $a : b : c : d = 96 : 264 : 156 : 180 = 8 : 22 : 13 : 15$. Отже, $P = a + b + c + d = 8x + 22x + 13x + 15x = 58$ см; $x = 1$ см. $a = 8$ см; $b = 22$ см; $c = 13$ см; $d = 15$ см. $H_{\text{пр.}} = 96 : 8 = 12$ см.

Проведемо висоти трапеції h, вони відтинають на більшій основі відрізки, сума яких $b - a = 22 - 8 = 14$ см. Нехай один із них — t, тоді інший $14 - t$. За теоремою Піфагора маємо:



$$\begin{cases} t^2 + h^2 = 13^2, \\ (14 - t)^2 + h^2 = 15^2; \end{cases} \quad \begin{cases} h^2 = 169 - t^2, \\ (14 - t)^2 + 169 - t^2 = 225; \end{cases}$$

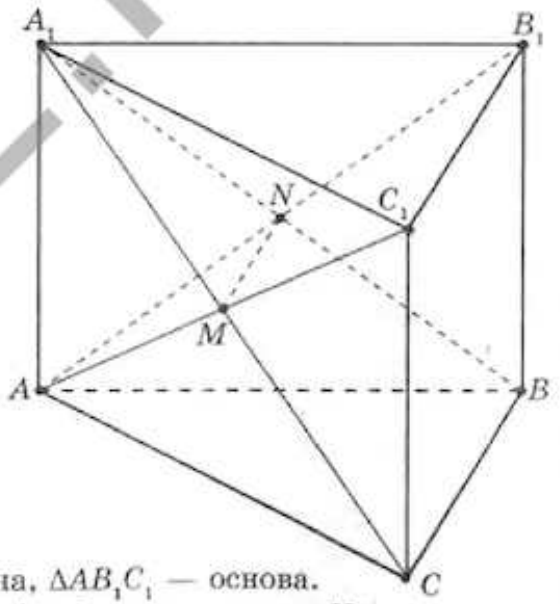
$196 - 28t + t^2 - 169 - t^2 = 225;\ 28t = 140;\ t = 5.$

Тому $h = \sqrt{169 - 25} = 12$ см. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{8 + 22}{2} \cdot 12 = 180$ см^2.

$V = S \cdot H = 180 \cdot 12 = 2160$ см^3.

Відповідь: 2160 см^3.

39. $ABCA_1B_1C_1$ — дана правильна трикутна призма, основи — ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ — правильні, кожне бічне ребро є висотою. Перерізи AB_1C_1 і A_1BC перетинаються по прямій MN, M і N — точки перетину діагоналей A_1C і AC_1, A_1B і AB_1 прямокутників AA_1C_1C і AA_1B_1B відповідно, M і N — середини вказаних відрізків, тоді MN — середня лінія ΔAB_1C_1 і ΔA_1BC, $MN = \frac{1}{2}BC$.



$\Delta AMN \sim \Delta AC_1B_1$, $k = \frac{1}{2}$; $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta AC_1B_1}$,

тоді $S_{\Delta AMN} : S_{MNB_1C_1} = 1 : 3$.

Розглянемо піраміду $A_1AB_1C_1$: A_1 — вершина, ΔAB_1C_1 — основа. Площина (A_1MN) ділить її на дві піраміди зі спільною висотою H.

Тоді $V_{A_1AMN} = \frac{1}{3} S_{\Delta AMN} \cdot H$; $V_{A_1MNB_1C_1} = \frac{1}{3} S_{MNB_1C_1} \cdot H$; $\frac{V_{A_1AMN}}{V_{A_1MNB_1C_1}} = \frac{\frac{1}{3} S_{AMN} \cdot H}{\frac{1}{3} S_{MNB_1C} \cdot H} = \frac{1}{3}$.

Позначимо $V_{A_1AMN} = x$, $V_{A_1MNB_1C_1} = 3x$, $x > 0$, тоді $V_{AMNBC} = 3x$.

$V_{\text{пр}} = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$; $V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$, тоді $V_{A_1BB_1C_1C} = \frac{2}{3} S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$.

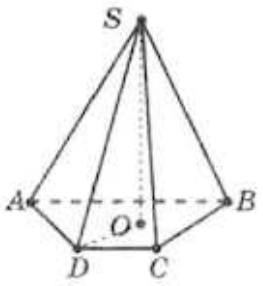
$V_{A_1ABC} = x + 3x = 4x$, тому $V_{A_1BB_1C_1C} = 2 \cdot 4x = 8x$, $V_{MNB_1BCC_1} = 8x - 3x = 5x$.

alez.net

Отже, $V_{A_1AMN} : V_{A_1MNB_1C_1} : V_{AMNBC} : V_{MNB_1BCC_1} = 1 : 3 : 3 : 5$.

Відповідь: 1 : 3 : 3: 5.

40. Розглянемо піраміду $ABCDS$. Оскільки всі її бічні ребра однакові, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.



$S_{ABCD} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$; $h = \sqrt{c^2 - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2}$; $\dfrac{b-a}{2} = \dfrac{50-14}{2} = 18$ см;

$h = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$ см. $S_{ABCD} = \dfrac{14+50}{2} \cdot 24 = 768$ см^2.

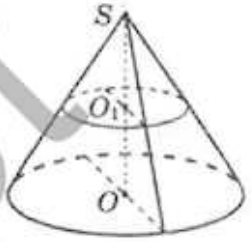
$R = \dfrac{1}{4S} = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$ — радіус кола, описаного навколо чотирикутника зі сторонами a, b, c і d.

$R = \dfrac{1}{4 \cdot 768} = \sqrt{(14 \cdot 30 + 50 \cdot 30)^2 \cdot (14 \cdot 50 + 30 \cdot 30)} = \dfrac{1920 \cdot 40}{4 \cdot 768} = 25$ см.

$H = \sqrt{65^2 - R^2} = 60$. $V = \dfrac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$; $V = \dfrac{1}{3} \cdot 768 \cdot 60 = 15\,360$ см^3.

Відповідь: 15 360 см^3.

41. Розглянемо конус. Якщо радіус його основи і висоту позначити R і H, то $V_к = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.



Площина, яка проходить через середину його висоти паралельно основі, поділяє його на маленький конус з об'ємом

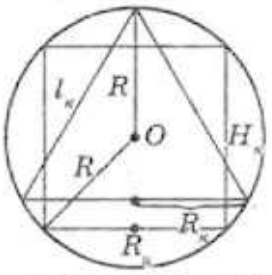
$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{H}{2} = \dfrac{\pi R^2 H}{24}$ і зрізаний конус з об'ємом

$V_2 = \dfrac{\pi R^2 H}{3} - \dfrac{\pi R^2 H}{24} = \dfrac{7\pi R^2 H}{24}$.

За умовою $V_2 - V_1 = V$, тобто $\dfrac{7\pi R^2 H}{24} - \dfrac{\pi R^2 H}{24} = \dfrac{\pi R^2 H}{4} = V$, тому $V_к = \dfrac{4V}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{4V}{3}$.

42. В осьовому перерізі бачимо квадрат і рівносторонній трикутник, які вписані в коло.



Позначимо радіус сфери R, тоді $S_{повн. цил.} = 2\pi R_ц (R_ц + H_ц)$.

$H_ц = 2R_ц = R\sqrt{2}$ — циліндр рівносторонній.

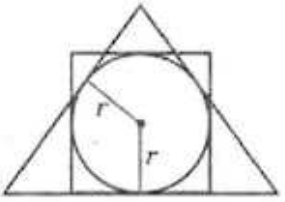
$S_{повн. цил.} = 2\pi R \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2} + R\sqrt{2}\right) = \pi R\sqrt{2} \cdot \dfrac{3R\sqrt{2}}{2} = 3\pi R^2 = S$.

Тому $R^2 = \dfrac{S}{3\pi}$. $S_{повн. кон.} = \pi R_к (R_к + l_к)$. $l_к = 2R_к = R\sqrt{3}$ — конус рівносторонній.

$S_{повн. кон.} = \pi \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2} + R\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi R\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9\pi R^2}{4} = \dfrac{9\pi}{4} \cdot \dfrac{S}{3\pi} = \dfrac{3S}{4}$.

Відповідь: $\dfrac{3S}{4}$.

43. В осьовому перерізі бачимо коло, вписане в квадрат і в рівносторонній трикутник.



Позначимо радіус кулі r, тоді $V_к = \dfrac{1}{3}\pi R_к^2 \cdot H_к$.

$l_к = 2R_к = 2r\sqrt{3}$ (конус рівносторонній).

$H_к = \sqrt{l_к^2 - R_к^2} = \sqrt{(2R_к)^2 - R_к^2} = R_к\sqrt{3} = 3r$. $V_к = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3r^2 \cdot 3r = 3\pi r^3 = Q$,

alnz.net

тому $r^3 = \frac{Q}{3\pi}$. $V_ц = \pi R_ц^2 H_ц$. $H_ц = 2R_ц = 2r$ (циліндр рівносторонній).

$V_ц = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{Q}{3\pi} = \frac{2Q}{3}$.

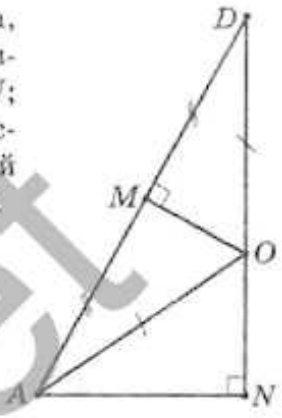
Відповідь: $\frac{2Q}{3}$.

44. Якщо куля дотикається до всіх координатних площин, то модулі координат її центра рівні і дорівнюють R, крім того, координати центра повинні задовольняти рівняння площини, тому

$7R + 4R + R - 30 = 0$; $R = 2{,}5$. $S_к = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 = 25\pi$.

Відповідь: 25π.

45. Нехай $DABC$ — даний правильний тетраедр, DN висота, $DN = 12$ см. За властивістю правильного тетраедра (§17) точка, рівновіддалена від усіх вершин, належить висоті, $O \in DN$; $AO = DO = CO = BO$. За умовою O — центр сфери, $R = 4$ см. Частина сфери, що міститься всередині тетраедра, — сферичний сегмент, $S = 2\pi RH$, R — радіус сфери, H — висота сегмента.



Розглянемо ΔADN: $\angle N = 90°$; $DN = 12$ см $= \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (§17),

$AD = a$; $AD = 6\sqrt{6}$ (см). ΔAOD — рівнобедрений,

M — середина AD, OM — медіана і висота, $\angle OMD = 90°$;

$MD = \frac{1}{2} AD = 3\sqrt{6}$. $\Delta AND \sim \Delta OMD$ ($\angle N = \angle M = 90°$, $\angle D$ — спільний), звідси

$\frac{AD}{DO} = \frac{ND}{MD}$; $\frac{6\sqrt{6}}{DO} = \frac{12}{3\sqrt{6}}$; $DO = \frac{6\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}}{12} = 9$ (см).

$NO = DN - DO = 3$ (см), отже, $H = 4 - 3 = 1$ (см) — висота сегмента, який знаходиться поза пірамідою.

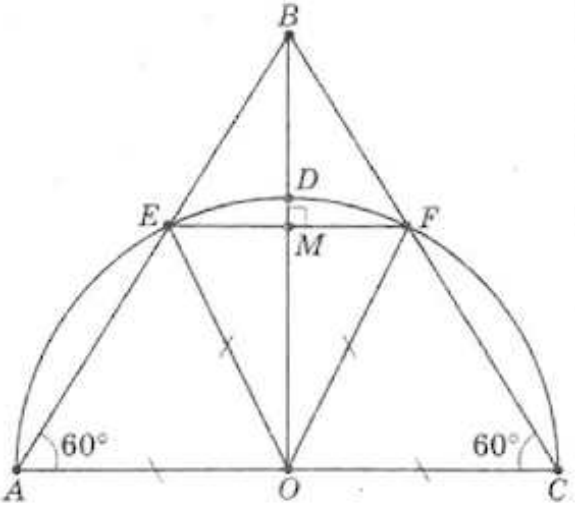
$S = 4\pi R^2 - 2\pi RH = 2\pi R(2R - H) = 2\pi \cdot 4 \cdot (8 - 1) = 56\pi$ (см^2).

Відповідь: 56π см^2.

46. Використаємо осьовий переріз даної комбінації тіл. Рівносторонній ΔABC — осьовий переріз конуса, $AB = BC$ — твірні, AC — діаметр основи, BO — висота конуса, O — центр основи — центр півкруга перерізу півкулі діаметром AC, $AC = 2R = AB = BC$.

Частина поверхні півкулі, що міститься всередині конуса, утворює сферичний сегмент, $S = 2\pi RH$.

Точки E і F — точки перетину півкруга з AB і CB відповідно; $OE = OF = OA = OC = R$, тоді ΔAOE і ΔCOF — рівносторонні ($\angle A = \angle C = 60°$), отже, E і F — середини AB і CB відповідно, EF — середня лінія ΔABC; $EF = R$, M — точка перетину EF і BO, D — точка перетину кола і BO.



$BO \perp EF$, $DM \perp EF$, $MD = H$, $DO = R$,

$OM = \frac{1}{2} BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;

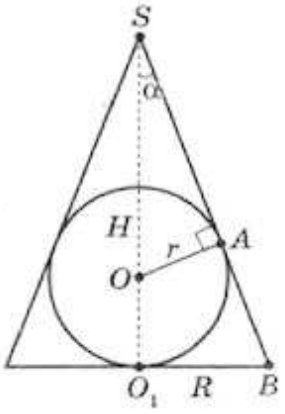
$H = DO - MO = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{2R - R\sqrt{3}}{2} = R\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$;

allgz.net

$$S = 2\pi R \cdot R\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \pi R^2\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Відповідь: $\pi R^2\left(2-\sqrt{3}\right)$.

47. Розглянемо осьовий переріз. Позначимо r — радіус кулі, R і H — радіус і висота конуса, а 2α — шуканий кут при вершині осьового перерізу конуса, тоді:



$$\frac{V_{кон}}{V_{куа}} = \frac{\pi R^2 H \cdot 3}{3 \cdot 4\pi r^3} = \frac{8}{3}, \text{ звідси } \frac{R^2 H}{r^3} = \frac{32}{3}. \quad (1)$$

ΔOAS: $\sin\alpha = \dfrac{r}{H-r}$; $r = \dfrac{H\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

ΔSO_1B: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{H}$; $R = H\operatorname{tg}\alpha$.

Підставимо r і R в (1), маємо:

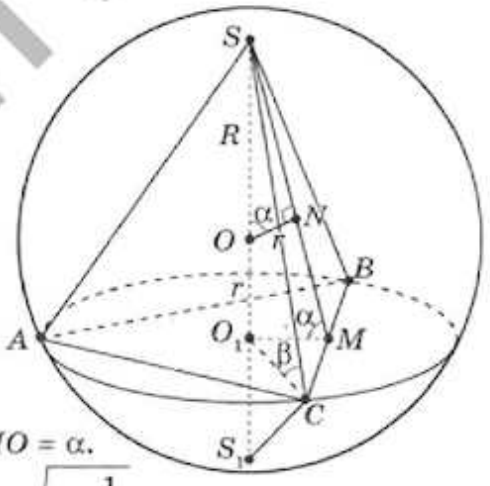
$$\frac{H^3\operatorname{tg}^2\alpha(1+\sin\alpha)^3}{H^3\sin^3\alpha} = \frac{32}{3}; \quad \frac{(1+\sin\alpha)^3}{\cos^2\alpha\sin\alpha} = \frac{32}{3};$$

$$\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)\sin\alpha} = \frac{32}{3}; \quad 35\sin^2\alpha - 26\sin\alpha + 3 = 0; \quad \sin\alpha = \frac{13\pm 8}{35}.$$

Отже, $2\alpha = 2\arcsin\dfrac{3}{5}$ або $2\alpha = 2\arcsin\dfrac{1}{7}$.

Відповідь: $2\arcsin\dfrac{3}{5}$ або $2\arcsin\dfrac{1}{7}$.

49. Розглянемо правильну піраміду $ABCS$, вписану в коло $(O; R)$ і описану навколо кола $(O; r)$. За умовою $R : r = n$. Позначимо шуканий кут β, тоді $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3H}{a\sqrt{3}}$ (a — сторона основи, H — висота піраміди). α — двогранний кут при основі піраміди, тоді $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{6H}{a\sqrt{3}}$.



Отже, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$.

$\Delta SOM \sim \Delta SNO$ (за гострим кутом).

SM — апофема, $ON \perp SM$, тому $\angle SON = \angle SMO = \alpha$.

ΔSNO: $\cos\alpha = \dfrac{ON}{OS} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{n}$. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n^2-1}$;

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2}$; $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2}$.

50. (Див. мал. до завд. 49.) Розглянемо правильну піраміду $ABCS$, вписану в коло $(O; R)$ і описану навколо кола $(O; r)$.

1) $V_{пір} = \dfrac{1}{3}S_{осн}\cdot H$; $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a — сторона основи. $H = R + r$.

Продовжимо висоту піраміди до перетину зі сферою S_1. Якщо O_1 — центр кола, описаного навколо основи, то $\angle SCS_1 = 90°$ (спирається на діаметр).

alg.net

$O_1C^2 = SO_1 \cdot O_1S_1$. $\frac{a^2}{3} = (R+r)(R-r)$; $a^2 = 3(R+r)(R-r) = 3(R^2 - r^2)$.

$V = \frac{1}{3} \cdot 3(R+r)(R-r)\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (R+r)$; $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(R+r)^2(R-r)$.

2) $S_{\text{повн.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бічн.}}$.

$S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{3}(R^2 - r^2)$; $S_{\text{бічн}} = 3 \cdot S_{CBS} = 3 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot SM = \frac{3}{2} a \cdot h$;

$h = \sqrt{SO_1^2 + O_1M^2} = \sqrt{(R+r)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{(R+r)^2 + \frac{(R^2 - r^2)}{4}} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4(R+r)^2 + R^2 - r^2}$. $S_{\text{бічн}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 2}\sqrt{R^2 - r^2}\sqrt{4(R+r)^2 + R^2 - r^2}$.

$S_{\text{повн}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{R^2 - r^2}\left(\sqrt{R^2 - r^2} + \sqrt{4(R+r)^2 + R^2 - r^2}\right)$.

Відповідь: 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(R+r)^2(R-r)$;

2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{R^2 - r^2}\left(\sqrt{R^2 - r^2} + \sqrt{4(R+r)^2 + R^2 - r^2}\right)$.

alldz.net

© 2015 issuu pdf downloader. All right reserved. Privacy Policy